Miriam Andrea Ardila Niño

La Enseñanza para la Comprensión (EpC)

en el aprendizaje significativo en matemáticas en estudiantes del ciclo tres de colegios distritales en Bogotá

ilae

Instituto Latinoamericano de Altos Estudios

La Enseñanza para la Comprensión (EpC)

en el aprendizaje significativo en matemáticas en estudiantes del ciclo tres de colegios distritales en Bogotá

La Enseñanza para la Comprensión (EpC)

en el aprendizaje significativo en matemáticas en estudiantes del ciclo tres de colegios distritales en Bogotá

Miriam Andrea Ardila Niño

Instituto Latinoamericano de Altos Estudios –ILAE–

Esta publicación se circunscribe dentro de la línea de investigación Sistemas Sociales y Acciones Sociales del ILAE registrada en Colciencias dentro del proyecto Educación, equidad y políticas públicas.

Publicación sometida a evaluación de pares académicos (*Peer Review Double Blinded*).

ISBN: 978-958-8492-56-8

Cra. 18 # 39A-46, Teusquillo, Bogotá, Colombia
PBX: (571) 232-3705, FAX (571) 323 2181
www.ilae.edu.co

Diseño de carátula y composición: Harold Rodríguez Alba
Edición electrónica: Editorial Milla Ltda. (571) 702 1144
editorialmilla@telmex.net.co

Editado en Colombia
Edited in Colombia

A Dios por darme fortaleza espiritual y brindarme esta oportunidad.
A mi esposo por su apoyo incondicional
A mi mamá, mi hermana y mi sobrina
por sus palabras de aliento.

Contenido

Agradecimientos

- A mi director de tesis el doctor Héctor Guillermo Sierra Cuervo por orientarme y brindarme su apoyo en este proceso.

- A mis estudiantes que participaron y tuvieron una gran disposición en el desarrollo de las sesiones.

- A las directivas y compañeros del Colegio Manuel Cepeda Vargas por su colaboración en el desarrollo del proyecto.

- A mi colega y compañera de maestría María Isabel González quien me invito a realizar esta maestría y siempre compartió sus experiencias permitiendo tener otra visión de esta investigación.

Resumen

El presente trabajo de investigación es un estudio explicativo cuasiexperimental que busca comprobar si existen diferencias entre el aprendizaje significativo de dos grupos de estudiantes del grado sexto del Colegio Manuel Cepeda Vargas empleando dos metodologías: la enseñanza para la comprensión (EpC) y la metodología clásica.

Llamaremos metodología clásica a la forma en que los docentes del Colegio Manuel Cepeda Vargas IED imparten sus clases, empleando diversas formas didácticas y metodológicas.

Un grupo corresponde al grupo control y el otro al grupo experimental, los cuales fueron elegidos en ambientes naturales y presentaron características similares, a los dos grupos se les aplico un pre-test diseñado con 20 preguntas del pensamiento numérico de la prueba estandarizada Saber 2009, registrando el aprendizaje significativo que tenían los estudiantes antes de iniciar la intervención en el aula. Luego se le aplicó la estrategia didáctica al grupo experimental empleando la metodología de la enseñanza para la comprensión (EpC) y el grupo control se continuó trabajando la metodología clásica.

Después de seis sesiones se aplicó un post-test diseñado con las mismas 20 preguntas del pre-test y así analizar su aprendizaje significativo después de realizar el trabajo de aula.

El análisis de los resultados se realizó por medio de la prueba t-Student, la cual muestra que en el pre-test los estudiantes presentan un rendimiento similar, mientras que el post-test los estudiantes del grupo experimental presentan un rendimiento superior al del grupo control.

Introducción

La palabra “comprensión” tiene muchos significados, distintos en contextos diferentes. Una exégesis total implicaría un estudio completo de todos los aspectos de la enseñanza de las matemáticas, ya que el tratar de medir o identificar la comprensión (en cualquiera de sus acepciones) lleva necesariamente al difícil campo de la evaluación, y cualquier intento de enseñar para la comprensión, a través de la comprensión o con la comprensión requiere de un proceso de extrapolación y aplicación de conocimientos y habilidades.

La labor cotidiana del educador, como el de cualquier ser humano, organización o empresa, le impone una revisión permanente de su que hacer, en procura de buscar y utilizar los medios que le permitan mejorar su desempeño y satisfacer las necesidades y expectativas de quienes constituyen su entorno inmediato y de la sociedad en general.

Así, indagarse por la efectividad del proceso de enseñanza y aprendizaje, constituye una labor inacabada que ha ocupado la atención de pedagogos, psicólogos, autoridades académicas, gobernantes, etc., como quiera que se le atribuye al conocimiento un papel fundamental en el desarrollo humano tanto a escala individual como social.

En el caso de las matemáticas, por considerársele una disciplina formativa y además por encontrársele involucrada en casi todos los aspectos del que hacer humano y la naturaleza, los métodos de enseñanza son objeto de permanente cuestionamiento y revisión. Sin embargo, según lo señalan muchos autores, la enseñanza de la matemática continúa mostrando constantes obstáculos y dificultades de diferentes órdenes, no salvadas aún de manera eficiente por matemáticos, psicólogos y educadores (Celis, 2001; Contreras, 2001; Bosch, 1991; Moreno et al., 2001; Stone 1999).

De manera particular podría asociarse los “problemas no resueltos” en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, con la actitud de las personas en general, quienes cuando se toca el tema de la matemática, se quejan de dificultad para dominar esta materia y suelen comúnmente aborrecer, o al menos no ver con gusto tal ciencia; siendo muy común encontrar en la mayoría de los alumnos: retraimiento, apatía, dificultad y temor frente a la matemática.

De cualquier manera, y sin importar cuál sea el grado de dificultad que entrañe el proceso de estudio y enseñanza de la matemática, se hace necesario continuar realizando esfuerzos orientados a facilitar la comprensión del qué, cómo y para qué, de los contenidos de ésta ciencia fundamental, dado su reconocido carácter formativo (estructuradora de la inteligencia humana), instrumental (instrumento para el estudio y desarrollo de otras disciplinas) y práctico (aplicaciones a la vida practica).

Dentro de tal propósito se ha querido utilizar una estrategia de enseñanza que ha probado ser útil a los propósitos de "acercar" a los estudiantes al conocimiento de cualquier disciplina de una manera motivante, creativa, formativa y comprensiva.

Tal es el caso de la Enseñanza para la Comprensión EpC, método de enseñanza que ha demostrado su utilidad en hacer del aprendizaje una actividad motivante, creativa, formativa y comprensiva.

Dentro del presente trabajo, se utiliza el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión EpC, en el diseño de una actividad de aula en torno al tema de la proporcionalidad, del programa de matemáticas correspondiente al grado 6.° de educación básica secundaria, según lo estipulado en los estándares para la excelencia en la educación propuestos por el gobierno nacional.

Capítulo primero
Planteamiento del problema

I. El problema y su importancia

¿La metodología de la enseñanza para la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes del ciclo 3 logrará un aprendizaje significativo en pruebas estandarizadas que la metodología clásica?

Llamaremos metodología clásica a la forma en que los docentes del Colegio Manuel Cepeda Vargas IED imparten sus clases, empleando diversas formas didácticas y metodológicas, porque nuestra experiencia como docentes nos lleva a involucrar diversas formas de enseñanza en el aula, según Sacristán el currículum evoluciona y cambia, como lo hace la práctica curricular. Ninguna teoría ni práctica proporciona un punto de referencia estable para el estudio del currículum, por eso nosotros los docentes empleamos diversas metodologías como la tradicional, constructivista, metodología de la indagación, pero que hasta el momento esta combinación tal vez no ha sido la más apropiada debido a los bajos resultados que se han obtenido en las pruebas estandarizadas aplicadas por el ICFES, ubicando al Colegio en nivel medio. De ahí surge la propuesta de realizar una comparación entre la metodología clásica y la de la enseñanza para la comprensión.

Las dificultades que hemos evidenciado en nuestra experiencia como docente, nos permite hacer una evaluación frente al proceso que viven los estudiantes en el grado sexto, como curso que pertenece al ciclo III (5.°, 6.°, y 7.°), ésta inquietud surge debido a que al aplicar diversas evaluaciones para observar su proceso, no se encuentra mayor diferencia en los conceptos que manejan los estudiantes de un grado o el otro, esto no solo se evidencia en estos grados, también se ha visto en otros cursos de un mismo ciclo.

El desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje en nuestro medio consiste principalmente en enseñar y aprender contenidos instruccionales esperando que el educando los acepte como si fuesen una necesidad realmente suya, cuando en la práctica el interés por esos contenidos puede, muy probablemente, no ser compartido por los estudiantes. Como lo señala Medina (2002)

> lo que ha convertido la escuela en un lugar aburrido es el hecho de darle más peso a unas formas de conocimiento que a otras, creer falsamente que se está realizando una mejor labor cuando se "obliga" al aprendizaje del conocimiento científico, que cuando se aborda "científicamente" el conocimiento cotidiano y se le imprime un ritmo de transformación cualitativo integrador y dinámico.

Si el auténtico estudio lo entendemos como la búsqueda de una verdad, resulta evidente que éste debe responder a una necesidad sentida por el estudiante (Stone, Assenza, Meza, Osorio, Unger, 1999; Stone, 1999).

El Ministerio de Educación Nacional en su documento sobre los lineamientos curriculares en el área de matemáticas, establece que el desarrollo del pensamiento numérico se refiere a la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones, están concebidos de tal manera que los estudiantes avancen hacia la construcción del número, su representación, las relaciones que existen entre ellos, así como las operaciones que se efectúan en cada uno de los sistemas numéricos. Permite el aprovechamiento del concepto intuitivo de los números que el estudiante adquiere desde antes de empezar su proceso escolar, en el momento en que empieza a contar, y a partir del conteo iniciarlo en la comprensión de las operaciones matemáticas (men, 1998).

Durante las últimas décadas ha surgido la preocupación de entidades estatales por medir el nivel académico de los estudiantes colombianos, para así conducir a las instituciones educativas a mejorar la calidad de la educación que se imparte en sus aulas y fuera de ellas. En la Prueba Saber 2009, diseñada y aplicada por el Ministerio de Educación Nacional –men– a estudiantes de grado quinto, se encontró que el rendimiento académico en matemáticas se encuentra en un nivel bajo. Específicamente, el 35% de los estudiantes se encuentran en un nivel insuficiente, es decir, son estudiantes con conocimientos que no responden a lo esperado. El 44% de los alumnos está en un nivel mínimo de desempeño, es decir, son capaces de solucionar problemas aditivos y multiplicativos, reconocen algunas propiedades de figuras planas. El 17% se ubica en un nivel satisfactorio, siendo estudiantes que además de tener las destrezas que se presentan en el nivel mínimo, solucionan problemas que involucran operaciones como potenciación, radicación, modelan situaciones de variación por medio de gráficas. Con preocupación se observa que tan sólo el 4% presenta un nivel sobresaliente en matemáticas, es decir, estos estudiantes tienen la capacidad de manejar un lenguaje matemático, reconocen y relacionan las diferentes representaciones, mientras pasan de una representación a otra, manejan las propiedades de diferentes conjuntos numéricos, utilizan técnicas de conteo para determinar la probabilidad de un evento, al mismo tiempo que analizan la información de datos estadísticos presentados en sus diferentes representaciones.

Por lo tanto, el problema de investigación consiste en comparar el rendimiento académico de los estudiantes al aplicar una prueba estandarizada después de haber trabajado con dos metodologías diferentes (metodología de la Enseñanza para la Comprensión EpC y la metodología clásica). Siendo éste un estudio explicativo cuasi experimental que se desarrollará en el Colegio Distrital Manuel Cepeda Vargas con dos grupos de estudiantes del ciclo tres elegidos en ambientes naturales y de similares características (número de estudiantes, edad, género, condiciones físicas, económicas, familiares, entre otros), de los cuales uno será el grupo experimental y el otro el grupo control.

Teniendo en cuenta que este trabajo se desarrollará durante dos meses, es necesario delimitar la temática a abordar en el área de matemáticas. Así, al observar los resultados de las Pruebas Saber 2009, entre los pensamientos que presentan mayor déficit en los estudiantes se encuentra el pensamiento numérico. De esta forma, este proyecto se centrará en el desarrollo de esta habilidad matemática, más exactamente en el tema de la proporcionalidad.

El Colegio Distrital Manuel Cepeda Vargas, ha sido elegido debido al bajo rendimiento académico presentado en las Pruebas Saber 2009 quedando ubicado en el puesto 8.006 de los 10.374 colegios evaluados. Además, la investigadora de este proyecto labora en dicha institución lo cual facilita el trabajo, reduce costos y tiempo a la hora de abordar la investigación. Al trabajar con dos modelos pedagógicos diferentes se podrá comparar los resultados y evaluar si presentan diferencias significativas. De este modo, si la metodología de la Enseñanza para la Comprensión EpC tiene un efecto positivo sobre el aprendizaje, se espera que el grupo experimental obtenga mejores resultados en la prueba final que se les aplicará y por qué no involucrar esta nueva metodología en nuestro currículo, que según Kemmis la teoría técnica sobre el currículum considera a la sociedad y a la cultura como una "trama" externa a la escolarización y al currículum como un contexto caracterizado por las "necesidades" y los objetivos sociales, deseados a los que la educación debe responder, descubriendo esas necesidades y desarrollando programas, con el fin de alcanzar los propósitos y los objetivos de la sociedad.

II. Objetivos respecto al problema

A. Objetivo general

Determinar las diferencias en el aprendizaje significativo utilizando la EpC en estudiantes de grado sexto del ciclo III.

B. Objetivos especificos

1. Caracterizar el nivel de aprendizaje de los estudiantes antes de implementar la estrategia didáctica basada en la EpC Enseñanza para la Comprensión.

2. Identificar los componentes para el diseño didáctico implementando la metodología de la EpC.

3. Determinar el aprendizaje significativo de los estudiantes una vez implementada la estrategia didáctica.

Capítulo segundo
Marco teórico

I. Historia de las matemáticas

Según las investigaciones frente a la construcción del razonamiento proporcional se hacen necesaria la comprensión de muchos prerrequisitos y la habilidad de relacionarlos (Streefland, 1983), por tanto es importante verlo como una extensión de algunas ideas matemáticas básicas a través de la cimentación del campo conceptual multiplicativo en tanto fomenta el análisis minucioso de cantidades (unidades de medidas y magnitudes) a través de la resolución de problemas donde subyacen relaciones funcionales entre los espacios de medidas, específicamente existe un marco que permite explicar el camino hacia el razonamiento proporcional complejo partiendo de procesos de unitización y normación (Lamon, 1989). La primera de ellas se refiere a la habilidad para construir una unidad de referencia o un todo (unidad todo) y luego reinterpretar una situación en términos de esta unidad, lo cual resulta fundamental para el desarrollo para ideas matemáticas de mayor complejidad. Este proceso el cual empieza en la temprana infancia (Steffe y Cobb, 1988) supone la composición progresivas de unidades para formar estructuras de cantidades cada vez más complejas la idea que agrupamientos de orden superior permiten a un estudiante ver simultáneamente los miembros agregados e individuales de un conjunto y de este modo ganar potencia matemática ha sido demostrada en muchas áreas incluyendo la adquisición de estrategias tempranas de conteo (Carpenter y Moser). Avanzar desde adición y sustracción a estructuras multiplicativas requiere la coordinación conceptual de composiciones múltiples (ver Behr, Harel, Post y Lesh) Algunas de las estructuras multiplicativas más simples requieren una composición de unidades.

Adicionalmente al cambio en las magnitudes de cantidades, la mayoría de las situaciones multiplicativas son composiciones de referente transformador (SCHWARTZ, 1988), es decir estructuras multiplicativas que combinan dos magnitudes con diferentes etiquetas para producir una cantidad cuya etiqueta no es la misma como multiplicando o multiplicador. Esta nueva cantidad necesita ser reconceptualizada como una entidad en sí misma, diferente de las medias que la componen. Así las estructuras multiplicativas involucran muchas capas de complejidad cognoscitiva.

Otros de los procesos para explicar el desarrollo del razonamiento proporcional es la normación, usó el término de normación para describir procesos de reconceptualizar un sistema en relación con alguna unidad fijada o estandarizada, este proceso de normación o la adopción de algún marco de unidades en el cual se reconceptualiza en esta situación, es frecuente en el pensamiento matemático, la construcción de ciertos procesos que permiten explicar la comprensión de los estudiantes frente a problemas de proporción como la unitización y la normación involucran una serie de estrategias que articulan las relaciones entre las magnitudes denominadas estrategias "intra" y estrategias "entre" donde se evidencia la comparación entre las razones internas y externas.

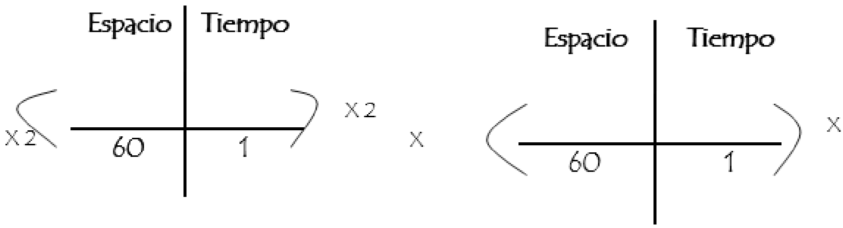
En la primera de ellas se usan igualdades de operadores escalares en un mismo espacio de medida para generar la razón correspondiente, por ejemplo en la siguiente situación: "Si un automóvil recorre 60 kilómetros en una hora, manteniendo una velocidad constante, ¿cuántos kilómetros habrá recorrido al cabo de dos horas?".

La relación que se establece entre los escalares del espacio de medida tiempo, es la misma que subyace en el espacio de medida distancia puesto que un elemento es múltiplo escalar de otro, de esta manera el factor no variable opera sobre dicho elemento para producir otro, en ambos espacios el operador es igual.

En las estrategias intra se comparan razones internas para resolver proporciones, describiendo así, relaciones de tipo funcional entre dos espacios de medida, siguiendo la misma situación se puede analizar:

En este caso se tiene en cuenta las relaciones funcionales entre los espacios de medida, haciendo descomposición escalar de la función (x 1/60) para el ejemplo.

En la construcción de las relaciones funcionales entre espacios de medida se realiza una descomposición de acuerdo a los escalares que los conformen a cada uno, es decir una función que permita la construcción de otros escalares a través del operador, que no varía según el universo numérico en el cual se encuentran dichos escalares, en tanto que en las relaciones intra el factor que opera sobre un elemento para producir otro varía según los múltiplos escalares que se tengan, en el mismo contexto la normación tiene varias posibilidades.



En ambos espacios de medida el operador escalar es el mismo y se generan otros elementos que son múltiplos escalares de este, sin embargo el operador escalar debe variar para engendrar otros escalares que no pertenecen al conjunto de múltiplos.

II. El marco conceptual de la enseñanza para la comprension EpC

La discusión acerca de qué y cómo enseñar no es nueva y se torna recurrente particularmente en las épocas de crisis económica y social de cualquier país, por cuanto se le ha exigido a la educación, históricamente, servir de fundamento para el progreso de las naciones. No siendo, sin embargo, el objeto de la presente investigación el de establecer relaciones de la educación con las esferas de la economía, la política, la ideología, etc., nos concentraremos exclusivamente en el entorno pedagógico, haciéndolo alrededor de una pregunta que se hace Martha Stone (1999), respecto a ¿qué se intercambia en la educación?, pues el objeto de la investigación propuesta es precisamente plantear una manera, concepción o método para que aquello que se intercambia sea o contribuya al desarrollo del individuo como ser individual y como ser social.

Para responder a éste interrogante, David Perkins (1999), de la Escuela de Graduados de Educación de Harvard y uno de los promotores del Proyecto de Enseñanza para la Comprensión de dicha institución, señala que si bien la enseñanza involucra el intercambio de tres elementos básicos, como son: conocimiento, habilidad y comprensión, es necesario preguntarse por la manera como los concebimos, señalando al respecto que:

El conocimiento es información a mano. Nos sentimos seguros de que un alumno tiene conocimientos si puede reproducirlos cuando se le interroga. El alumno puede decirnos qué hizo Magallanes, dónde queda Pakistán, cual es la primera ley del movimiento de Newton. Y si el conocimiento es información a mano, las habilidades son rutinas de desempeño a mano. Descubrimos si las habilidades están presentes extendiendo la mano. Para saber si un estudiante escribe con buena gramática y ortografía, se examina una muestra de su escritura. Para controlar las habilidades matemáticas, planteamos un cuestionario o un problema.

Pero la comprensión demuestra ser más sutil. Por cierto no se reduce al conocimiento. Comprender lo que hizo Magallanes o qué significa la primera ley del movimiento de Newton requiere más que solo reproducir información. Comprender también es más que una habilidad rutinaria bien automatizada. El alumno que hábilmente resuelve problemas de física o escribe párrafos con oraciones tópicas puede no comprender casi nada de física, de escritura o de aquello acerca de lo que escribe. Aunque el conocimiento y la habilidad pueden traducirse como información y desempeño rutinario a mano, la comprensión se escapa de éstas normas simples[1].

Así, para Perkins, la comprensión es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe[2]; es un proceso activo y constructivo, un proceso de extrapolación y aplicación de conocimientos y habilidades en un ámbito mucho más amplio, o si se quiere, a cualquier ámbito de nuestra vida cotidiana.

De tal manera,

---

1 David Perkins. "¿Qué es la comprensión?", en Martha Stone (comp.). *La enseñanza para la comprensión*, Buenos Aires, Paidós, pp. 69 y 70.

2 Ibíd., p. 70.

> aprender para la comprensión es más parecido a aprender a improvisar jazz, mantener una buena conversación o trepar una montaña, que aprender la tabla de multiplicar, las fechas de los presidentes, o que F = MA. Aprender hechos puede ser un antecedente crucial para el aprendizaje para la comprensión, pero aprender hechos no es aprender para la comprensión.

Por su parte Vito Perrone (1994) señala que:

> Nuestros estudiantes necesitan poder usar el conocimiento, no simplemente saber cosas. La comprensión tiene que ver con el establecimiento de relaciones entre las cosas, sobre un conocimiento profundo y no superficial, y sobre una mayor complejidad, no simplicidad. No podemos continuar con un proceso de proveerle una educación profunda y orientada hacia la investigación para algunos, y una educación limitada, basada en habilidades y pobre en comprensión para la mayoría. Obviamente tenemos más que hacer[3].

Esta idea de la comprensión, es decir, la comprensión como un desempeño, que es por supuesto una concepción constructivista, no se reduce a la simple representación, imagen o modelo mental de un hecho –aunque se sirve de ella– sino que va más allá. A propósito de las representaciones como instrumentos facilitadores de un aprendizaje, señala Perkins que la comprensión depende de adquirir o construir representaciones adecuadas de algún tipo, un esquema, modelo mental o imagen, lo cual ha sido comprobado por los trabajos de Richard Mayer[4], quien demostró que lo que él llamaba modelos conceptuales[5] promovían la comprensión, por cuanto ayudan a los estudiantes a resolver problemas con mucha más flexibilidad, en comparación con aquellos estudiantes que no los tienen o que no los utilizan.

De tal manera, la comprensión como desempeño, busca que el estudiante no solo sepa, sino que piense flexiblemente a partir de lo que sabe· La comprensión vista como desempeño, es diferente de la simple comprensión representacional. A propósito, dice Perkins:

---

3 Vito Perrone. *Cómo involucrar a los estudiantes en la enseñanza*. Paper facilitado por Edilberto León, Universidad Jorge Tadeo Lozano, de un curso sobre EpC., dictado por Daniel Gray en dicha institución.
Vito Perrone, es el director de educación de docentes de la Escuela de Postgrado en Educación de Harvard.

4 Cit. por Perkins, p. 75.

5 Los modelos conceptuales son diagramas que tienen por objeto representar relaciones significativas entre conceptos, en forma de proposiciones.

> El problema básico con la visión representacional es que si bien las representaciones juegan un papel importante en algunos tipos de comprensión, es difícil sostener la afirmación general de que la comprensión es representación en algún sentido interesante.
>
> ... ¿Tiene sentido decir que comprender algo es tener un modelo mental de ello? No, porque podemos tener un modelo mental de algo sin entenderlo, según lo considera el criterio del desempeño flexible. Un modelo mental no es suficiente para comprender sencillamente porque no hace nada por sí mismo. Para los desempeños que demuestran comprensión, una persona debe operar sobre el modelo o con él. Por ejemplo, supongamos que un alumno trata de entender los circuitos eléctricos por medio de la imagen del flujo de fluidos. Entonces no es suficiente para el alumno que imagine el fluido en los cables o inclusive en movimiento. El alumno debe imaginar qué ocurre con el fluido cuando pasa a través de las resistencias y otros elementos del circuito y deducir las consecuencias del modelo. En otras palabras, el alumno tiene que manipular e interrogar al modelo [...] el modelo es un modelo mental "manejable" y nada se sacará de él sin manejarlo.
>
> ... Comprender un tópico quiere decir ni más ni menos que ser capaz de desempeñarse flexiblemente en relación con el tópico: explicar, justificar, extrapolar, vincular de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria. Comprender es cuestión de ser capaz de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. La capacidad de desempeño flexible es la comprensión.
>
> Todo esto se vuelve más fácil de articular y elaborar con la ayuda de un término clave: desempeños de comprensión, o su equivalente, desempeños comprensivos [...] son actividades que van más allá de la memorización y la rutina [...] Precisamente porque los desempeños comprensivos le piden al estudiante que vaya más allá, llevan a avances en la comprensión así como a producciones de comprensión[6].

Así, la visión de la comprensión vinculada con el desempeño desafía la preeminencia de las representaciones, pues lo que el estudiante debe adquirir no es solo una representación sino una capacidad de desempeño. Aprender un tópico comprensivamente –se dice– no es tanto construir una representación que se adecue al tópico, como desarrollar una capacidad de desempeño flexible alrededor de él. De tal manera, la comprensión vinculada con el desempeño –según Perkins– da como resultado un tipo de constructivismo que pone el énfasis en construir

6 Ibíd., p. 73.

un repertorio de desempeños de comprensión para los estudiantes, más que en cultivar la construcción de representaciones.

Pero, ¿implica lo anterior un desconocimiento de las actividades rutinarias relacionadas con el conocimiento y las habilidades que adquirimos en nuestro proceso como individuos y/o como educandos? Por supuesto que no –responde Perkins–:

> De ninguna manera el énfasis en los desempeños comprensivos o desempeños de comprensión –esto es, actividades que van más allá de la memorización y la rutina– significa quitarle importancia al conocimiento y a las habilidades básicas. Por cierto, todos estaríamos profundamente limitados sin el apoyo de la memorización y la rutina. Sin embargo, comprender exige algo más
>
> ... el contraste entre desempeños de comprensión y actividades rutinarias no es absoluto. Implica niveles. Recordar el propio número de teléfono parece apenas un reflejo bien practicado. Pero recordar el nuevo número de teléfono de un amigo puede implicar recordar unos pocos dígitos, suponer otros, preguntarse si suena bien, controlar si los primeros tres dígitos corresponden al barrio donde vive la persona. Es un proceso mucho más activo y constructivo, un proceso de extrapolación de lo que uno específicamente recuerda de todo el número. Es, en efecto, un desempeño de comprensión en pequeña escala. Aunque recordar a menudo implica un simple acto de memoria, puede exigir mucho más.

Pero, ¿cómo involucrar la comprensión en el proceso de enseñanza y de aprendizaje? Según lo señala Stone (1999), cuando la comprensión se concibe como la capacidad de usar el propio conocimiento de maneras novedosas, tiene implicaciones para la pedagogía, en apariencia simples pero en algo complejas en su esencia[7]. Y al respecto señala:

> Una pedagogía de la comprensión necesita más que una idea acerca de la naturaleza de la comprensión y su desarrollo. Un marco conceptual guía debe abordar cuatro preguntas claves:
>
> ¿Qué tópicos vale la pena comprender?
> ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?
> ¿Cómo podemos promover la comprensión?
> ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?

---

7 Martha Stone Wiske. “¿Qué es la enseñanza para la comprensión?”, en *La enseñanza para la comprensión*, Buenos Aires, Paidós, pp. 95 a 106.

A éstos interrogantes ha respondido un largo trabajo emprendido por investigadores-docentes de diferentes profesiones y nacionalidades, –colombianos, entre otros–, en el proyecto de investigación colaborativa sobre Enseñanza para la Comprensión EpC, que ha tenido su origen y desarrollo en la Escuela de Graduados de Educación de Harvard, quienes han formulado un marco conceptual para la Enseñanza para la Comprensión, cuyos elementos discutiremos a continuación[8].

Para responder a los cuatro interrogantes antes mencionados se han planteado cuatro elementos:

- Tópicos generativos
- Metas de comprensión
- Desempeños de comprensión
- Evaluación diagnóstica continúa

Mediante los tópicos generativos, se define lo que vale la pena comprender, identificando tópicos o temas generativos y organizando propuestas curriculares alrededor de ellas. Las metas de comprensión, clarifican lo que los estudiantes tienen que comprender articulando metas claras centradas en comprensiones clave; motiva el aprendizaje de los alumnos involucrándolos en desempeños de comprensión que exigen que éstos apliquen, amplíen y sinteticen lo que saben, y controla y promueve el avance de los estudiantes por medio de evaluaciones diagnósticas continuas de sus desempeños, con criterios directamente vinculados con las metas de comprensión.

---

8 Dicho proyecto ha involucrado entre otros a Martha Stone, catedrática e investigadora en la Escuela de Graduados de Educación de Harvard, donde también codirige el Centro de Tecnología Educativa; Verónica Boix Mansilla, investigadora del Proyecto Cero de Harvard; Eric Buchovecky, profesor de física en una escuela secundaria de Fort Devis, Massachusetts; Howard Gardner, profesor de educación en la Escuela de Graduados de Educación de Harvard y codirector del Proyecto Cero de Harvard, autor de catorce libros y cientos de artículos, sus trabajos más conocidos están relacionados con las inteligencias múltiples; David Perkins, investigador principal asociado de la Escuela de Graduados de Educación de Harvard, codirector del Proyecto Cero de Harvard, autor de cientos de artículos y de varios libros, entre ellos *La escuela inteligente: del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente*; Daniel Gray Wilson, investigador del Proyecto Cero de Harvard, quien durante tres años se desempeñó como coordinador de estudios de postgrado en la Universidad Jorge Tadeo Lozano, orientando su trabajo hacia la EpC; Rosario Jaramillo, exprofesora de aprendizaje y enseñanza de historia en el departamento de historia de la Universidad Javeriana; entre otros.

Por supuesto que poner en práctica éste marco no es un trabajo simple y mecánico, lo cual iría contra la esencia misma de la comprensión. Por el contrario, como sus autores lo señalan, su puesta en marcha nos debe involucrar en un proceso cíclico y reflexivo permanente, en el que los diferentes elementos entran en juego repetidamente en diferentes secuencias[9].

- *Topicos generativos*

Si bien se reconoce que la determinación acerca de lo que debería involucrar un currículo representa un problema bastante serio en cuanto se trata de definir y priorizar intereses, expectativas, necesidades, de educandos, educadores, padres, administradores educativos, gobiernos, sociedad en general dentro de la cual se vive, la experiencia relacionada con los esfuerzos por implementar la Enseñanza para la Comprensión, ha revelado como rasgos recurrentes a tener en cuenta, entre otros los siguientes:

Que el contenido –los tópicos– esté vinculado con las preocupaciones y experiencias que ocupan a los alumnos en su vida cotidiana; que dicho contenido no solo ofrezca información, sino que posibilite y motive al estudiante a adentrarse en nuevas ideas, interrelaciones, indagaciones, etc., que le lleven a descubrir nuevas ideas, conexiones, soluciones, etc., y en tal sentido se sugiere la selección de unidades curriculares que comprometan a los alumnos, sostengan su interés en la investigación constante y los lleven a ver conexiones más amplias. Por supuesto que en todo momento deberá tomarse en cuenta el contexto individual (edad, intereses personales, formación intelectual), cultural y social de los alumnos, de tal manera que los tópicos seleccionados puedan brindar todo su potencial o capacidad generativa.

Dicha capacidad generativa depende, sin embargo, tal como lo demuestra la práctica docente cotidiana, de la manera como se lo enseñe, es decir, de la actitud particular que asuma el profesor tanto frente al tema a tratar como al alumno, la que es muy sopesada por el estudiante y determinante en alto grado de su interés, dedicación y por supuesto de los resultados que pretenda o defina sacar del tema o de la

9 Stone. Ob. cit., p. 96.

asignatura en general. Por tanto, es fundamental la fuerte motivación y entusiasmo que ponga el docente, su pasión por lo que enseña, su compromiso consigo mismo, con los educandos, con la institución a la que sirve, con la sociedad de la cual hace parte.

- *Metas de comprensión*

Las metas de comprensión afirman explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender. Mientras los tópicos generativos delinean los aspectos de un tema, o los temas de una materia que los estudiantes indagarán, las metas definen de manera más específica las ideas, procesos, relaciones o preguntas que los alumnos comprenderán mejor por medio de su investigación[10].

La pregunta clave que puede ayudar a fijar metas de comprensión apropiadas puede ser: ¿qué es lo que más queremos o aspiramos que nuestros alumnos comprendan al final del curso? La cual nos ubica en el plano de las metas fundamentales que como docentes debemos fijar. Por lo general las respuestas a dicha pregunta involucran propósitos abarcadores y de largo plazo, tales como: "Los alumnos comprenderán el concepto de proporcionalidad, identificarán y establecerán relaciones entre razones en diferentes situaciones de la vida real". Como se puede deducir, son metas generales a las que tienden tanto docentes como estudiantes al final del curso correspondiente, por lo que se les ha dado el nombre de hilos conductores (*throughlines*, en inglés), expresión que viene del método de actuación de Stanislavski y alude a un tema fundamental de una obra en el cual el actor puede centrar la caracterización de su personaje[11].

Otra inquietud clave respecto a las metas de comprensión, es el cómo acercarse a ellas, para lo que se sugiere fijar propósitos más específicos y particulares que faciliten alcanzar el propósito de aprendizaje mayor mediante pasos menores y secuénciales. Esto por supuesto permite al estudiante la comprensión y asimilación inicial de ideas y procesos

10 Recuérdese que el conocimiento es el resultado de la constante indagación que el hombre ha hecho de su y en su entorno. Como tal, el aprendizaje comprensivo y la enseñanza para la comprensión, constituyen procesos cíclicos y permanentes de indagación, de autodescubrimiento, alrededor de un hecho, para su pleno entendimiento, comprensión y el manejo flexible de dicho conocimiento.

11 C. Stanislavski. *An actor prepare*s, cit. por M. Stone. Ob. cit., p. 105.

preliminares –o si se quiere, más elementales– que lo preparan para la comprensión de ideas, conceptos y procesos de mayor complejidad. Particularmente importante para la implementación de la concepción de la Enseñanza para la Comprensión y de cualquier modelo pedagógico –y para el logro de las metas de comprensión–, resultan ser los procesos en los que queramos involucrarlos, por ejemplo, habilidad para resolver problemas, colaboración entre alumnos, etc.

Así, para que las metas de comprensión sean útiles a los fines de la Enseñanza para la Comprensión, deberán definirse de manera explícita, estar dispuestas en de una estructura compleja –lo que ayuda a identificar conexiones e interrelaciones– que incluya submetas, y centradas en conceptos clave y modalidades de indagación importantes en la materia en cuestión[12].

- *Desempeños de comprensión*

Los desempeños de comprensión se consideran el elemento central dentro de la concepción de la Enseñanza para la Comprensión, como quiera que ellos o a través de ellos logramos como docentes evidenciar la comprensión de los estudiantes respecto a un tema o materia. Como actividades, son las más relevantes entre todas las planteadas para la comprensión, y serán tal si desarrollan y demuestran claramente la comprensión, por parte de los alumnos, de metas de comprensión importantes. Siendo así, como docentes debemos tomar muy en cuenta que tales actividades sean bien diseñadas, de forma que los estudiantes puedan involucrarse en la puesta en práctica de lo que han comprendido. En el caso de la proporcionalidad, por ejemplo, los docentes pueden diseñar ejercicios o tareas como las de: estimar la altura de un árbol o un edificio, estimar el diámetro de la luna en un día de luna llena, estimar el ancho de un río, etc. También, pueden pedir a los alumnos que observen, analicen y deduzcan relaciones de proporcionalidad en hechos de la vida real, ya sea de fenómenos de la naturaleza, de la economía, de la sociedad, de su propia familia, etc. Este tipo de tareas, por supuesto, contribuyen a desarrollar y demostrar la comprensión por parte de los alumnos.

12 Stone. Ob. cit., p. 107.

Como características de los desempeños de comprensión se han señalado particularmente las siguientes[13]:

- Se vinculan directamente con metas de comprensión.

- Desarrollan y aplican la comprensión por medio de la práctica, propiciando entre los alumnos un proceso reiterativo y cíclico en el que ellos evalúan-mejoran-evalúan sus propios desempeños.

- Utilizan múltiples estilos de aprendizaje y formas de expresión, lo que significa que están o deben estar diseñados de forma tal que los alumnos puedan aprender por medio de múltiples sentidos y formas de inteligencia[14].

- Promueven un compromiso reflexivo con tareas que entrañan un desafío y que son posibles de realizar, es decir, que retan sus mentes haciéndoles pensar y no simplemente recordar o repetir conocimientos o habilidades rutinarios.

- Demuestran la comprensión, es decir que son fácilmente evidente por otros.

- *Evaluacion diagnostica continua*

El cuarto elemento del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión es la evaluación diagnóstica continua de desempeños en relación con metas de comprensión. Tal evaluación toma en cuenta como sujeto activo al estudiante, quien debe evaluar paulatina y permanentemente su proceso de aprendizaje en busca de un mejoramien-

13 Ibíd., p. 114.

14 Señalemos primero que lo que se entiende por inteligencia, es la capacidad para: resolver problemas cotidianos, para generar nuevos problemas y para crear productos y/o para ofrecer servicios dentro del propio ámbito cultural. De acuerdo a los desarrollos teóricos de Howard Gardner, precursor de la teoría de las inteligencias múltiples –una teoría del funcionamiento cognitivo– cada persona posee ocho inteligencias: la inteligencia lingüística, la inteligencia lógico-matemática, la inteligencia espacial, la inteligencia corporal-kinética, la inteligencia musical, la inteligencia interpersonal, la inteligencia intrapersonal y la inteligencia naturalista.

to continuo de sus habilidades de comprensión, de tal manera que éste pueda juzgar su propio progreso. La evaluación se hace bajo criterios previamente definidos por el profesor y discutidos con el estudiante, de forma que éste tenga siempre claro los propósitos del aprendizaje.

III. Historia de la didáctica de las matemáticas

Como plantea Ifrah (1985) las matemáticas nacen de una necesidad humana, de un orden práctico y utilitario, donde contar, medir, llevar la contabilidad, analizar situaciones de variación, recolectar grandes volúmenes de información e interpretarla, trabajar con formas, establecer relaciones entre figuras, constituyen parte de las estrategias planteadas por el hombre para dar solución a problemas cotidianos, los cuales surgen a medida que se convive en sociedad. Es así como desde las primeras civilizaciones la matemática es inventada, reconstruida y utilizada por la comunidad en general, "son hechas por el hombre y para el hombre" (D'Amore, 2006, p. 563). En la prehistoria, el ser humano no sabía contar, pero a medida que buscaba estrategias prácticas que le permitieran conocer cuánto poseía, inició un largo camino que lo llevó a construir conceptos matemáticos. Por ejemplo, el concepto de número, comienza con la correspondencia biunívoca, donde a cada animal del rebaño se le hacía corresponder un objeto, "muescas en un trozo de hueso o de madera" (Ifrah, 1985, p. 101), o nudos como lo hacían los Incas.

Otra de las estrategias más creativas, utilizadas por nuestros antepasados fue hacer uso del cuerpo para medir o contar, dando origen a la aritmética, la cual, se enriquece cuando el hombre se ve inmerso en una sociedad en la cual surgen los intercambios comerciales. Poco a poco, se empiezan a hacer abstracciones, hasta alcanzar un nivel donde se puede operar con conceptos más abstractos centrados en la matemática misma, con una vida independiente, como plantea Blanco (2001a). Esta ciencia ha sido objeto de estudio de múltiples matemáticos como Pitágoras, Fermat, Newton, Leibniz, Euler, Euclides, entre otros, quienes con sus teorías, teoremas, axiomas y demás planteamientos, llevaron a convertir la matemática en una ciencia de estudio con cada vez más adeptos y estudiosos.

Aunque los conocimientos en matemática seguían avanzando, estos se limitaban a escuelas de estudio de grandes pensadores y aún no llegaba a los menores de edad. Por ejemplo, en Colombia en el siglo XVII reinaba el poder español, quienes trajeron sus costumbres y creencias a estas tierras, la educación estaba a cargo de los jesuitas quienes permitían el ingreso a seminarios, colegios mayores y a la educación superior tan sólo a clases sociales de origen noble, además la educación estaba centrada en la transmisión de creencias religiosas, la lectura y la escritura, HERRERA (2003).

Es en la Gran Colombia que la educación pasa al control del estado, quien en su preocupación por alcanzar una cobertura mayor incrementó el número de instituciones educativas en el país, pero aún la enseñanza de la matemática seguía siendo muy elemental y regida por el método basado en el castigo y la disciplina extrema, impartida por docentes que no tenían formación en pedagogía, HERRERA (2003).

Es en 1762 cuando JOSÉ CELESTINO MUTIS llega a la Nueva Granada como médico y estudioso de la naturaleza, crea la cátedra de matemáticas en el Colegio Mayor Nuestra Señora del Rosario en Bogotá, ésta tan sólo se basaba en la enseñanza de los principios de NEWTON y la teoría Copernicana, SÁNCHEZ (2001). Al morir MUTIS termina esta cátedra, la cual sólo es retomada en 1848 en el Colegio Militar, como parte de la preparación de ingenieros y militares, y cuyo *pensum* se centraba en el aprendizaje de la aritmética, el álgebra, la geometría plana y espacial, la trigonometría, la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral.

Aunque en 1886 con la aprobación de la Constitución Política, la educación fue uno de los pilares que buscaban llegar a más población, pero en 1902 la guerra deja consecuencias funestas no sólo en la economía sino también en la educación. Por lo tanto, fueron interrumpidos los estudios profesionales, pero años más tarde se graduó un pequeño grupo de ingenieros, quienes no sólo ejercieron en el campo de la ingeniería, sino que también fueron profesores de matemáticas de diferentes colegios en Bogotá. Debido a que la formación de dichos profesionales no era en educación, sino en matemática pura la enseñanza de las matemáticas en las aulas continúa siendo memorística y basada en algoritmos repetitivos.

Debido a que la matemática es utilizada cotidianamente en diferentes contextos y situaciones, surgió la necesidad de enseñar esta ciencia en las escuelas, desarrollándose así la educación matemática y la profesión docente CHERVEL (1988; cit. por D'AMORE, 2006). Pero, en las aulas, el trabajo era limitado a mecanizar algoritmos, sin tener en cuenta cómo lograr aprendizajes significativos, que dieran respuesta a problemas cotidianos. El nacimiento de la educación matemática fue muy diferente al de la matemática utilizada por los antepasados. En el siglo XIX, la formación de los futuros maestros de matemáticas y, por ende, los currículos de matemáticas, centraba su atención a la teoría de conjuntos y la lógica matemática (SÁNCHEZ, 2001). En esta época el docente era el dueño del saber en el aula y lo transmitía a sus educandos de manera magistral. Como planteaba GENTILE el maestro debe repetir la matemática como una receta que el estudiante aprende y repite, sin salirse de un esquema trazado con anterioridad (cit. por D'AMORE, 2006). Este pensamiento primó y aún prima en algunos maestros de las escuelas primarias y secundarias.

Pero, vale la pena resaltar que antes del siglo XIX ya existían investigaciones en pedagogía que cambiaban el paradigma existente sobre el papel del estudiante, el cual dejaba de ser pasivo y se convertía en el centro del aprendizaje. BLANCO (2001a) plantea que AMOS COMENIO fue el primero en darle un carácter activo al estudiante y evoca la importancia de lo natural en la enseñanza. Posteriormente, ROUSSEAU enfatiza la recuperación de lo familiar y social en la formación del niño, y PESTALOZZI se convierte en el pionero de un método naturalista e intuitivo de enseñanza basado en el conocimiento de la realidad.

Pese a estos avances en pedagogía, poco se influenciaba a los docentes de matemáticas, quienes continuaban impartiendo una educación formal en sus aulas. Pero los estudios sobre el cómo enseñar de manera más eficiente, llevo a una revolución educativa que se basaba en el principio que saber una ciencia es diferente a enseñar dicha ciencia. A fines del siglo XIX e inicios del siglo XX, es el auge de las metodologías activas, entre los cuales según COLBERT (2008) vale la pena resaltar los trabajos de pedagogos como: DEWEY, quien ve a la educación como un proceso de formación constante de y para la vida; DECROLY (1934), quien considera que los docentes no sólo deben valorar los intereses de los estudiantes, sino también las actividades planteadas y desarrolladas en el aula, las cuales deben hacer uso constante de la observación y análisis de situaciones y ADOLPHE FERRIÈRE, para quien el trabajo en grupo es importante, sin dejar de lado las diferencias individuales.

Siendo PIAGET un psicólogo, centro sus estudios en la lógica del niño, y trabajó con conceptos matemáticos, como el concepto de número. Basado en los resultados de sus experimentos con menores de diferentes edades, plantea la teoría del desarrollo cognitivo, en la cual estructura el pensamiento del niño por etapas a medida que va creciendo, la primera etapa es conocida como la *sensora-motriz* y se presenta entre los cero y los dos años, donde el niño no sólo controla su cuerpo, sino que reconoce que hay otros objetos que desea probar, tocar, oler, entre otros. La segunda etapa se presenta de los dos a los siete años y es llamada la *pre-operacional*, en la cual el niño desarrolla la capacidad de imaginar, y aunque pueden hacer operaciones sencillas, son incapaces de dar justificaciones lógicas, dan respuestas por "motivación subjetiva" (Piaget, 1967, p. 21) siendo "el niño incapaz de un enlace correcto" (Piaget, 1967, p. 23). La tercera etapa se presenta de los siete a los 11 años y es conocida como *etapa de las operaciones concretas*, donde presenta una mayor capacidad para razonar de manera lógica aunque ligada a la realidad empírica. A partir de los 11 años se encuentra la *etapa de operaciones formales*, donde los niños y adolescentes tienen la capacidad de razonar de manera abstracta. Para Piaget, estas etapas siguen una linealidad, lo cual fue punto de discordia con otros investigadores (Colbert, 2008).

Por su parte, Lev Vigotsky, si bien comparte algunas ideas con Piaget, por ejemplo, los dos ven al estudiante como un ente activo en su proceso de aprendizaje: para Piaget "el niño manipula objetos antes de abstraer un concepto" (cit. por Blanco, 2001b), y para Vigotsky "el aprendiz se considera como un sujeto activo" (Colbert, 2008).

Vigotsky, contrario a lo que plantea Piaget, resalta la influencia que tiene lo social en el desarrollo intelectual del niño y adolescente (Colbert, 2008). Para Vigotsky no sólo el estudiante es un ser activo, sino que el docente juega un papel importante a la hora de generar ambientes de aprendizaje y plantear preguntas que promuevan la comprensión y el aprendizaje colaborativo. En la historia de la didáctica de la matemática, planteamientos como los de Piaget, Vigotsky, al igual que los de Bruner (1966; cit. por D'Amore, 2006) con su teoría de la instrucción, conllevan a repensar el cómo se enseñaba matemáticas en las aulas. Es así como, surgen las propuestas didácticas de Dienes, Castelnuovo, Montessori, quienes basados en metodologías activas, llevan al estudiante a interactuar con el medio, con material concreto, con el docente, con otros compañeros y con sus propias ideas, para así estructurar su propio aprendizaje (D'Amore, 2006).

A finales del siglo XIX y mediados del siglo XX, a la par que se lograron grandes avances en pedagogía, en Alemania, se gestó un cambio a nivel de educación matemática, con los aportes de matemáticos como Klein, Frege, Lindemann, Bass, Smith, entre otros. Estos científicos manifestaban su preocupación por la formación de los maestros de matemáticas en las universidades de esa época, (Loria, 1933), y buscaban estrategias que conllevaran a enriquecer la labor docente. En el Congreso de Matemáticas de 1908, Smith propuso crear una Comisión de Instrucción Matemática, la cual es conocida como la International Commission on Mathematical Instruction –ICMI–, siendo Klein el primer presidente de dicha comisión, cuyo principal objetivo era formar maestros de matemáticas. La misión de esta comisión era que los investigadores no olvidaran la matemática elemental de su formación universitaria ni todo lo aprendido de la matemática moderna al trabajar con sus estudiantes. Para Klein, era importante que los maestros llevaran los descubrimientos de la matemática como ciencia, a sus educandos (Comisión de Historia del Comité Español de Matemáticas, –CHCEM–, 2005).

Klein no sólo trabajó en la comisión, sino que fue uno de los más destacados maestros de la Escuela de Gotinga, donde aplicó sus planteamientos. Pero fue Guillermo von Humboldt quien reestructuró el sistema de educación pública en Alemania, creando escuelas para la formación de maestros, incrementando las horas de clase de matemáticas (seis horas semanales) y planteando un sistema de educación matemática nacional unificado. "La Universidad de Gotinga jugó un papel importante en este proceso de cambio, en razón a sus esfuerzos en la formación de maestros [...] en particular de las matemáticas" (Pareja, 2009, p. 37).

Basados en los aportes de la psicología, la antropología, la sociología y por supuesto la educación matemática de finales del siglo XIX y XX, la educación matemática pasa de centrarse en la teoría de conjuntos y la lógica, a utilizar nuevas estrategias que conlleven a aprendizajes significativos. Tal es el caso de propuestas como estrategia de resolución de problema, juego como estrategia de aprendizaje, uso de herramientas tecnológicas, laboratorios, entre otros.

Uno de los autores que ha desarrollado una teoría constructivista del aprendizaje, en la que, entre otras cosas, ha descrito el proceso de aprender, los distintos modos de representación y las características de una teoría de la instrucción es Bruner quien ha retomado mucho el trabajo de Jean Piaget.

Bruner ha sido llamado el padre de la psicología cognitiva, dado que desafió el paradigma conductista de la caja negra.

El aprendizaje consiste esencialmente en la categorización (que ocurre para simplificar la interacción con la realidad y facilitar la acción). La categorización está estrechamente relacionada con procesos como la selección de información, generación de proposiciones, simplificación, toma de decisiones y construcción y verificación de hipótesis. El aprendiz interactúa con la realidad organizando los inputs según sus propias categorías, posiblemente creando nuevas, o modificando las preexistentes. Las categorías determinan distintos conceptos. Es por todo esto que el aprendizaje es un proceso activo, de asociación y construcción.

Otra consecuencia es que la estructura cognitiva previa del aprendiz (sus modelos mentales y *schemas*) es un factor esencial en el aprendizaje. Ésta da significación y organización a sus experiencias y le permite ir más allá de la información dada, ya que para integrarla a su estructura debe contextualizarla y profundizar.

Para formar una categoría se pueden seguir estas reglas: a) definir los atributos esenciales de sus miembros, incluyendo sus componentes esenciales; b) describir cómo deben estar integradas sus componentes esenciales; c) definir lo límites de tolerancia de los distintos atributos para que un miembro pertenezca a la categoría.

Bruner distingue dos procesos relacionados con la categorización: *concept formación* (aprender los distintos conceptos) y *concept attainment* (identificar las propiedades que determinan una categoría). Bruner sostiene que el *concept formation* es un proceso que ocurre más que el *concept attainmente* en personas de cero a 14 años, mientras que el *concept attainment* ocurre más que el *concept formation* a partir de los 15 años.

En cuanto a los modos de representación, Bruner ha distinguido tres modos básicos mediante los cuales el hombre representa sus modelos mentales y la realidad. Estos son los modos enactivo, icónico y simbólico.

- *Representación enactiva*

Consiste en representar cosas mediante la reacción inmediata de la persona. Este tipo de representación ocurre marcadamente en los primeros años de la persona, y Bruner la ha relacionado con la fase senso-motora de Piaget en la cual se fusionan la acción con la experiencia externa.

- *Representación icónica*

Consiste en representar cosas mediante una imagen o esquema espacial independiente de la acción. Sin embargo tal representación sigue teniendo algún parecido con la cosa representada. La escogencia de la imagen no es arbitraria.

- *Representación simbólica*

Consiste en representar una cosa mediante un símbolo arbitrario que en su forma no guarda relación con la cosa representada. Por ejemplo, el número tres se representaría icónicamente por, digamos, tres bolitas, mientras que simbólicamente basta con un 3.

Los tres modos de representación son reflejo de desarrollo cognitivo, pero actúan en paralelo. Es decir, una vez un modo se adquiere, uno o dos de los otros pueden seguirse utilizando.

- Aspectos de una teoría de la instrucción: Bruner sostiene que toda teoría de instrucción debe tener en cuenta los siguientes cuatro aspectos:

1. La predisposición hacia el aprendizaje.
2. El modo en que un conjunto de conocimientos puede estructurarse de modo que sea interiorizado lo mejor posible por el estudiante.
3. Las secuencias más efectivas para presentar un material.
4. La naturaleza de los premios y castigos.

- Implicaciones educativas: las siguientes son las implicaciones de la teoría de Bruner en la educación, y más específicamente en la pedagogía:

- *Aprendizaje por descubrimiento*: el instructor debe motivar a los estudiantes a que ellos mismos descubran relaciones entre conceptos y construyan proposiciones.

- *Diálogo activo*: el instructor y el estudiante deben involucrarse en un diálogo activo (p. ej., aprendizaje socrático).

- *Formato adecuado de la información*: el instructor debe encargarse de que la información con la que el estudiante interactúa esté en un formato apropiado para su estructura cognitiva.

- *Currículo espiral*: el currículo debe organizarse de forma espiral, es decir, trabajando periódicamente los mismos contenidos, cada vez con mayor profundidad. Esto para que el estudiante continuamente modifique las representaciones mentales que ha venido construyendo.

- *Extrapolación y llenado de vacíos*: la instrucción debe diseñarse para hacer énfasis en las habilidades de extrapolación y llenado de vacíos en los temas por parte del estudiante.

- *Primero la estructura*: enseñarle a los estudiantes primero la estructura o patrones de lo que están aprendiendo, y después concentrarse en los hechos y figura.

IV. Aprendizaje significativo

Ausubel plantea que el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse por “estructura cognitiva”, al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización.

En el proceso de orientación del aprendizaje, es de vital importancia conocer la estructura cognitiva del alumno; no sólo se trata de saber la cantidad de información que posee, sino cuales son los conceptos y proposiciones que maneja así como de su grado de estabilidad. Los principios de aprendizaje propuestos por Ausubel, ofrecen el marco para el diseño de herramientas metacognitivas que permiten conocer la organización de la estructura cognitiva del educando, lo cual permitirá una mejor orientación de la labor educativa, ésta ya no se verá como una labor que deba desarrollarse con "mentes en blanco" o que el aprendizaje de los alumnos comience de "cero", pues no es así, sino que, los educandos tienen una serie de experiencias y conocimientos que afectan su aprendizaje y pueden ser aprovechados para su beneficio.

Ausubel resume este hecho en el epígrafe de su obra de la siguiente manera: "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente".

Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos: son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición.

Esto quiere decir que en el proceso educativo, es importante considerar lo que el individuo ya sabe de tal manera que establezca una relación con aquello que debe aprender. Este proceso tiene lugar si el educando tiene en su estructura cognitiva conceptos, estos son: ideas, proposiciones, estables y definidos, con los cuales la nueva información puede interactuar.

El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante ("subsunsor") pre existente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras.

La característica más importante del aprendizaje significativo es que, produce una interacción entre los conocimientos más relevantes de la estructura cognitiva y las nuevas informaciones (no es una simple asociación), de tal modo que éstas adquieren un significado y son integradas a la estructura cognitiva de manera no arbitraria y sustancial, favoreciendo la diferenciación, evolución y estabilidad de los subsunsores pre existentes y consecuentemente de toda la estructura cognitiva.

Aprendizaje por descubrimiento y aprendizaje por recepción: en el aprendizaje por recepción, el contenido o motivo de aprendizaje se presenta al alumno en su forma final, sólo se le exige que internalice o incorpore el material (leyes, un poema, un teorema de geometría, etc.) que se le presenta de tal modo que pueda recuperarlo o reproducirlo en un momento posterior.

En el aprendizaje por descubrimiento, lo que va a ser aprendido no se da en su forma final, sino que debe ser re-construido por el alumno antes de ser aprendido e incorporado significativamente en la estructura cognitiva.

El aprendizaje por descubrimiento involucra que el alumno debe reordenar la información, integrarla con la estructura cognitiva y reorganizar o transformar la combinación integrada de manera que se produzca el aprendizaje deseado. Si la condición para que un aprendizaje sea potencialmente significativo es que la nueva información interactúe con la estructura cognitiva previa y que exista una disposición para ello del que aprende.

A. Requisitos para el aprendizaje significativo

Al respecto Ausubel dice:

> El alumno debe manifestar [...] una disposición para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es potencialmente significativo para él, es decir, relacionable con su estructura de conocimiento sobre una base no arbitraria.

Lo anterior presupone que el material sea potencialmente significativo, esto implica que el material de aprendizaje pueda relacionarse de manera no arbitraria y sustancial (no al pie de la letra) con alguna estructura cognoscitiva específica del alumno, la misma que debe poseer "significado lógico" es decir, ser relacionable de forma intencional y sustancial con las ideas correspondientes y pertinentes que se hallan disponibles en la estructura cognitiva del alumno, este significado se refiere a las características inherentes del material que se va aprender y a su naturaleza.

Cuando el significado potencial se convierte en contenido cognoscitivo nuevo, diferenciado e idiosincrático dentro de un individuo en particular como resultado del aprendizaje significativo, se puede decir que ha adquirido un "significado psicológico" de esta forma el emerger del significado psicológico no solo depende de la representación que el alumno haga del material lógicamente significativo, " sino también que tal alumno posea realmente los antecedentes ideativos necesarios" en su estructura cognitiva.

B. Tipos de aprendizaje significativo

Es importante recalcar que el aprendizaje significativo no es la "simple conexión" de la información nueva con la ya existente en la estructura cognoscitiva del que aprende, por el contrario, sólo el aprendizaje mecánico es la "simple conexión", arbitraria y no sustantiva; el aprendizaje significativo involucra la modificación y evolución de la nueva información, así como de la estructura cognoscitiva envuelta en el aprendizaje.

Ausubel distingue tres tipos de aprendizaje significativo: de representaciones, de conceptos y de proposiciones.

1. Aprendizaje de representaciones

Es el aprendizaje más elemental del cual dependen los demás tipos de aprendizaje. Consiste en la atribución de significados a determinados símbolos, al respecto Ausubel dice: "ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el alumno cualquier significado al que sus referentes aludan".

Este tipo de aprendizaje se presenta generalmente en los niños, por ejemplo, el aprendizaje de la palabra "pelota", ocurre cuando el significado de esa palabra pasa a representar, o se convierte en equivalente para la pelota que el niño está percibiendo en ese momento, por consiguiente, significan la misma cosa para él; no se trata de una simple asociación entre el símbolo y el objeto sino que el niño los relaciona de manera relativamente sustantiva y no arbitraria, como una equivalencia representacional con los contenidos relevantes existentes en su estructura cognitiva.

2. Aprendizaje de conceptos

Los conceptos se definen como "objetos, eventos, situaciones o propiedades de que posee atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos, partiendo de ello podemos afirmar que en cierta forma también es un aprendizaje de representaciones".

Los conceptos son adquiridos a través de dos procesos. Formación y asimilación. En la formación de conceptos, los atributos de criterio (características) del concepto se adquieren a través de la experiencia directa, en sucesivas etapas de formulación y prueba de hipótesis, del ejemplo anterior podemos decir que el niño adquiere el significado genérico de la palabra "pelota" , ese símbolo sirve también como significante para el concepto cultural "pelota", en este caso se establece una equivalencia entre el símbolo y sus atributos de criterios comunes. De allí que los niños aprendan el concepto de "pelota" a través de varios encuentros con su pelota y las de otros niños.

El aprendizaje de conceptos por asimilación se produce a medida que el niño amplía su vocabulario, pues los atributos de criterio de los conceptos se pueden definir usando las combinaciones disponibles en la estructura cognitiva por ello el niño podrá distinguir distintos colores, tamaños y afirmar que se trata de una "pelota", cuando vea otras en cualquier momento.

3. Aprendizaje de proposiciones

Este tipo de aprendizaje va más allá de la simple asimilación de lo que representan las palabras, combinadas o aisladas, puesto que exige captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones.

El aprendizaje de proposiciones implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario, luego estas se combinan de tal forma que la idea resultante es más que la simple suma de los significados de las palabras componentes individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva. Es decir, que una proposición potencialmente significativa, expresada verbalmente, como una declaración que posee significado denotativo (las características evocadas al oír los conceptos) y connotativo (la carga emotiva, actitudinal e ideosincrática provocada por los conceptos) de los conceptos involucrados, interactúa con las ideas relevantes ya establecidas en la estructura cognoscitiva y, de esa interacción, surgen los significados de la nueva proposición.

V. Curriculo

Según Gimeno Sacristán

> el tener que ampliar las posibilidades del modelo curricular por objetivos va más allá de lo que puede dar de sí, tal como se ha demostrado, es un exceso provocado por una sociedad tecnificada que extiende sus ansias de eficiencia y precisión a todos sus ámbitos.
>
> Las derivaciones que se obtienen de Piaget para la metodología pedagógica y para seleccionar contenidos del currículo son un ejemplo de cómo, desde la psicología no conductista, se puede orientar el desarrollo del proceso educativo. Se podría decir que todas las perspectivas quieren sugerir algo sobre cómo diseñar el proceso de enseñanza aprendizaje, porque también son configuradoras de la teoría del currículo. El problema está en ver como diseñar la enseñanza, considerando las aportaciones que pueden hacer las ópticas racionalistas, sociológicas o psicológicas. La síntesis de perspectivas parece llamar a la utilización de un tipo de técnica en el diseño que interprete el esquema medios-fines con más amplitud que el tecnicismo del modelo de objetivos (1997, p. 172).

En la transformación procesual del *curriculum* existen seis niveles o fases: 1. El currículo prescrito; 2. El currículo presentado a los profesores; 3. El currículo moldeado por los profesores; 4. El currículo en acción (el currículo realizado); y 6. El currículo evaluado. Gimeno Sacristán (1998).

Un currículo unitario (fomenta dudas) sobre los contenidos que son pertinentes aprender. La cultura no existe en singular, lo que observamos son culturas. Si todas las culturas son igualmente respetables y si además tienen especificidad no puede haber un currículo más adecuado que otro, y uno, sólo resultaría irrespetuoso con alguna de las culturas o con todas a la vez. Gimeno Sacristán (1998b, p. 220).

El profesor siempre diseña sus clases de alguna forma, bajo el formato de plan escrito explícito o elaborándose internamente una estrategia mental para orientar y secuencializar su acción. La acción intencional sigue, una agenda cuyo despliegue es el transcurrir de la práctica profesional. Los planes del docente están diseñados por un hilo conductor que les da sentido, en el caso de que sean expresión sincera de esquemas pensados para poner en marcha. Los diseños del profesor componen actividades seleccionadas y articuladas para tratar los objetivos y contenidos curriculares vigentes o para darles una alternativa a estos, dentro de un marco temporal y organizativo concreto.

VI. La educacion matemática en Colombia

La educación matemática entre las décadas de los años 1940 y 1950 se centraba en la enseñanza tradicional de la teoría de conjuntos y la lógica matemática. Con la enseñanza de una matemática avanzada desde la escuela se buscaba preparar a los niños como científicos. Pero, al igual que a nivel mundial, en Colombia, tanto maestros como padres consideraban este tipo de enseñanza de las matemáticas como un fracaso "... los niños aprendían muchas palabras raras, aprendían operaciones entre conjuntos y símbolos lógicos y no podían hacer operaciones entre naturales ni fraccionarios" (men, 1998, p. 16).

Por otra parte, en 1948 llega a Colombia el italiano Carlo Federici Casa, quien como plantea Sánchez (2005) fue protagonista del cambio en la enseñanza de las matemáticas en Colombia. Inició enseñando lógica matemática a un grupo de estudiantes de ingeniería, posteriormente viendo la necesidad de separar la ingeniería de la profesión matemática en 1951 fundó la carrera de matemáticas en la Universidad Nacional. Naciendo así la educación pública y con ella carreras profesionales que buscaban formar a nuevos docentes en matemática y posteriormente a matemáticos puros.

Aunque sus conocimientos en matemáticas eran las de un matemático puro, mostró gran interés en el cómo transmitir este conocimiento de manera sencilla y lúdica a los niños. Por lo tanto, participó de manera activa en la reforma educativa que se dio en el país.

Es en la década del 1950 cuando se profesionaliza la labor docente y surge el interés no sólo por la enseñanza de las ciencias abstractas, sino por la organización de un currículo y un plan de estudios común a todas las instituciones educativas. Es en esta década cuando se establecen las áreas básicas del conocimiento que se debían trabajar en cualquier plantel educativo de manera obligatoria, entre ellas se encontraba la matemática, pero cada institución debía reestructurar su plan de estudios, ya que de manera casi exclusiva centraba su atención en los números y las operaciones (Herrera, 2003).

En la década de los 1960 con el "boom" de la matemática moderna, ésta permea la educación colombiana, los planes de estudio contenían una gran dosis de lógica matemática y conjuntos, al mismo tiempo que continúa primando el pensamiento numérico, vale la pena resaltar que el enfoque teórico que utilizaban los docentes en esta década era el conductista (Vasco, 2006). Pero, a mediados de los años 1960 e inicio de 1970 el doctor Federici empieza a influenciar los enfoques pedagógicos utilizados por los docentes e introduce las ideas de Piaget, con lo cual surge el interés de un gran número de universidades y docentes por adoptar nuevas estrategias que conllevaran a acercar las matemáticas a más niños y adolescentes.

Dejando de lado la matemática moderna, surge la necesidad de regresar a lo básico y para ello se estableció el Decreto 1710 de 1963 para primaria y el Decreto 080 de 1974 para secundaria. Estos decretos planteaban una reforma cuyos programas estaban basados en objetivos generales y específicos pero de una manera conductual.

Es en el año 1975, cuando en la búsqueda del mejoramiento de la educación en el país, se plantea la reforma educativa, para lo cual el men organiza un equipo interdisciplinario conformado por expertos de diferentes áreas del conocimiento y en el caso específico de la educación matemática nombra como asesor al doctor Carlos Eduardo Vasco Uribe, quien junto con un grupo de investigadores en educación de diferentes universidades del país, se encargan de revisar y diseñar programas de educación básica. Poco a poco este equipo va generando un cambio significativo, en cuanto al qué, el cómo y cuándo enseñar matemáticas. Como resultado del trabajo de este equipo, nace la Renovación Curricular de Matemáticas. Entre los cambios significativos que se dieron fue el dejar de lado la matemática moderna y el largo listado de temas a trabajar, por el trabajo por sistemas de pensamiento. Además proponía a los docentes trabajar por medio de unidades didácticas basadas en metodologías activas.

Entre los sistemas de pensamiento se plantearon:

- Los sistemas simbólicos: se relaciona con los símbolos, "lo que se escribe, se pinta o se habla" (men, 1998, p. 16).

- Los sistemas conceptuales: son todos los conceptos matemáticos que se desarrollan, "que se piensa, se construye, se elabora mentalmente" (men, 1998, p. 16).

- Los sistemas concretos: objetos manipulables por los estudiantes que facilitan la adquisición de un aprendizaje, "de donde los niños pueden sacar los conceptos esperados" (MEN, 1998, p. 16).

Aunque a nivel mundial se avanzaba a pasos agigantados en la didáctica de la matemática, ésta tiene su auge en el país en la década de los años 1980, cuando surge un sin número de proyectos de formación a docentes, de grupos de estudio e investigaciones enfocadas al trabajo en didáctica de la matemática, entre ellos encontramos: una empresa docente de la Universidad de los Andes, el proyecto Descubro la Matemática del doctor Jorge Castaño, el Anillo matemático, las investigaciones realizadas por el doctor Alonso Takahaschi sobre educación matemática, la Escuela Pedagógica Experimental, investigaciones sobre Vigotsky y Bruner de la Universidad Externado de Colombia, el grupo Gedes de la Universidad del Quindío, los estudios realizados por el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica (CIUP), investigaciones en enseñanza de las matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, dirigidos por el doctor Carlos Vasco, entre otros estudios de no menor relevancia (Vasco, 1998).

Esta renovación curricular primó durante casi dos décadas, pero sus frutos no se limitaron a la simple aplicación de programas ya establecidos por el MEN, sino que docentes de los diferentes niveles educativos, investigadores y otros interesados, continuaron con su trabajo de mejora en la calidad educativa en matemáticas en el país. Estos avances se vieron materializados en la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994), donde se da más libertad al docente para planear y organizar el currículo de matemáticas, pero vale la pena resaltar que se rescata y resalta el trabajo por sistemas planteado en la renovación curricular, lo cual se puede observar en los artículos 21 y 22 de la Ley 115.

Aunque en el año 1994 se avanzó al publicar la Ley General de Educación, la cual llegó a todos los docentes del país y les llevó a mejorar su quehacer pedagógico, la investigación en educación matemática por parte del MEN, de universidades y docentes del país, continúo su rumbo, alcanzando nuevos logros, que valen la pena resaltarlos. En el año 1998 el Ministerio de Educación Nacional publica los *Lineamientos curriculares de matemáticas*, siendo éste un documento que busca "... atender esa necesidad de orientaciones y criterios nacionales sobre los currículos, sobre la función de las áreas y sobre nuevos enfoques"

(MEN, 1998, p. 11). Es en los *Lineamientos* que prevalece el trabajo por sistemas, y se consolidan y organizan los conceptos matemáticos en cinco pensamientos: el pensamiento numérico, el pensamiento espacial, el pensamiento métrico, el pensamiento variacional y el pensamiento aleatorio.

En los *Lineamientos curriculares* se entiende por pensamiento matemático lo planteado por el constructivismo, corriente pedagógica en la cual "la matemáticas son una creación de la mente humana" (MEN, 1998, p. 25). Al mismo tiempo, el pensamiento matemático se entiende como las totalidades estructuradas con sus elementos, sus operaciones.

De los diferentes pensamientos se puede resaltar:

- *Pensamiento numérico*: no sólo incluye todos los conceptos relacionados con sistemas de numeración de manera abstracta, sino que hace referencia a las habilidades y destrezas que pueden alcanzar los educandos al trabajar con números, operaciones, comparaciones, estimaciones, órdenes de magnitud, planteamientos de juicio relacionados con la numeración.

- *Pensamiento espacial*: hace referencia a todo el trabajo con sistemas geométricos, es el conjunto de los procesos cognitivos por medio de los cuales los seres humanos observamos, manipulamos, construimos y representamos objetos del espacio. Al mismo tiempo en este pensamiento se tiene en cuenta las relaciones intra e inter figurales y las transformaciones.

- *Pensamiento métrico*: no sólo hace referencia a los sistemas de medición, está totalmente relacionada con la construcción del concepto de magnitud, conservación de magnitudes, estimación y la selección adecuada de unidades de medida.

- *Pensamiento aleatorio*: este es uno de los pensamientos que en Colombia no se trabajaba como parte de la matemática hasta hace unas décadas. Hace referencia a contenidos de probabilidad y estadística. Además busca que el estudiante adquiera habilidades para analizar información del mundo que lo rodea, pasando por la recolección, exploración, interpretación, planeamiento de conjeturas, cálculo de correlaciones, planteamiento de hipótesis, etc.

- *Pensamiento variacional*: hace referencia a todos los sistemas algebraicos y analíticos. En este pensamiento se involucra el análisis, organización y modelación matemática de situaciones problema propias de las ciencias, de la vida cotidiana y de la matemática misma. Este trabajo no sólo toma como marco de referencia los planteamientos que se encuentran en los *Lineamientos curriculares* y que se mencionan anteriormente, también tiene en cuenta los *Estándares curriculares básicos*, el cual es un documento que fue publicado en el año 2005 y busca establecer los mínimos a alcanzar por cada estudiante en cualquier institución educativa, tanto pública como privada, en un ciclo determinado.

Al hablar de ciclo, se habla de un grupo de grados en los cuales se deben alcanzar unos estándares específicos, para lo cual se tiene no sólo un año lectivo, sino hasta tre años. Los ciclos planteados son:

- Ciclo 1: transición, primero y segundo de primaria
- Ciclo 2: tercero y cuarto
- Ciclo 3: quinto a séptimo de educación básica
- Ciclo 4: octavo y noveno
- Ciclo 5: décimo y undécimo

Los estándares trabajados en este proyecto corresponden al pensamiento numérico en el ciclo 3.

Capítulo tercero
Características del diseño de investigación

I. Hipótesis

Hipótesis nula

H_0: los estudiantes que recibieron sus conceptos matemáticos por medio de la enseñanza para la comprensión, evidencian aprendizaje significativo similar que aquellos que trabajaron mediante la metodología clásica

Hipótesis alternativa

H_1: los estudiantes que recibieron sus conceptos matemáticos por medio de la enseñanza para la comprensión, evidencian aprendizaje significativo superior en comparación a quienes trabajaron bajo la metodología clásica.

II. Diseño metodológico

El presente proyecto se basa en el paradigma cuantitativo, constituyendo un estudio explicativo cuasi experimental en el que se realizó un análisis de diferencias de medias tras aplicar una prueba de entrada y otra de salida, a un grupo experimental y otro grupo control. Cuya fórmula de diseño es:

G1	O1	X	O2
G2	O3	-----	O4

Representando G1 al grupo experimental y G2 al grupo control.

En las investigaciones cuasi experiméntales, la asignación de los grupos experimentales y de control se realizan en forma aleatoria, con la finalidad principal de lograr una igualación, lo más cercana posible, de las características de los sujetos que conforman esos grupos (Guillermo Briones. *Metodología de la investigaciones cuantitativa en las ciencias sociales*, p. 44).

En un experimento es necesario que se tengan por lo menos dos grupos para comparar. Para saber si existe influencia de las diferentes fuentes de validación relacionadas. Los grupos deben ser: inicialmente equivalentes durante todo el desarrollo del experimento, menos por lo que respecta a la variable independiente. Así mismo, los instrumentos de medición deben ser iguales y aplicados de la misma manera (Sampieri, Collado y Baptista, 1999).

En un cuasiexperimento no se asignan al azar los sujetos a los grupos experimentales, sino que se trabaja con grupos intactos, estos alcanzan validez interna en la medida en que demuestran la equivalencia en el proceso de experimentación (Sampieri, Collado y Baptista, 1999).

III. Definición de las variables

A. Definición conceptual

- *Metodología de enseñanza como variable independiente*

Acercar la matemática a la escuela requiere hacer una trasposición didáctica que facilite la adquisición de conceptos de esta ciencia en los estudiantes. Existen varias metodologías usadas por los maestros para trasmitir el conocimiento a sus estudiantes. Pero, esta investigación se centra en el uso de dos metodologías, una que es la más usada por los docentes, la clásica y la otra que ha tenido un gran auge en las últimas décadas, la metodología de la enseñanza para la comprensión EpC.

- *Enseñanza para la Comprensión EpC*

Es un enfoque metodológico basado en la comprensión como un desempeño, que es por supuesto una concepción constructivista, no se reduce a la simple representación, imagen o modelo mental de un hecho –aunque se sirve de ella– sino que va más allá. A propósito de las representaciones como instrumentos facilitadores de un aprendizaje, señala Perkins, que la comprensión depende de adquirir o construir representaciones adecuadas de algún tipo, un esquema, modelo mental o imagen, lo cual ha sido comprobado por los trabajos de Richard Mayer[15], quien demostró que lo que él llamaba modelos conceptuales[16] promovían la comprensión, por cuanto ayudan a los estudiantes a resolver problemas con mucha más flexibilidad, en comparación con aquellos estudiantes que no los tienen o que no los utilizan. Al mismo tiempo, se incrementa el desarrollo del pensamiento crítico y las competencias comunicativas, propositivas, argumentativas, de trabajo en equipo y resolución de problemas cotidianos y de la matemática.

- *Metodología clásica*

Es un modelo pedagógico centrado en contenidos y transmisión de aprendizajes repetitivos y memorísticos, siendo el docente quien de manera unidireccional transmite la información a sus estudiantes, para que ellos de manera pasiva la aprendan. El maestro elige los contenidos a trabajar en el aula, demostrando poco interés por las expectativas de los estudiantes.

El estudiante desde su primera infancia debe respetar la autoridad del docente, y sólo puede participar cuando el maestro lo considere pertinente. Las aulas cuentan con un tablero y al frente filas de sillas que denotan uniformidad y un orden preestablecido. El maestro da un discurso que los estudiantes escuchan de manera atenta, tomando apuntes, estudiando y posteriormente replicando la información cuando el maestro lo solicite.

- *Aprendizaje significativo como la variable dependiente*

El pensamiento numérico se refiere a la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación de emplear esta comprensión en formas flexi-

15 Cit. por Perkins, p. 75.

16 Los modelos conceptuales son diagramas que tienen por objeto representar relaciones significativas entre conceptos, en forma de proposiciones.

bles para hacer juicos matemático y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones (McIntosh, 1992, cit. por el MEN, 1998).

B. Definición operacional

Metodología de enseñanza (variable independiente)

- Enseñanza para la comprensión EpC

El trabajo en el aula se desarrolló a partir de guías diseñadas por medio de la metodología de la enseñanza para la comprensión en las cuales se especifica el material a usar para realizar las mediciones. Estas guías abordaron un marco conceptual clave:

– ¿Qué tópicos vale la pena comprender?
– ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?
– ¿Cómo podemos promover la comprensión?
– ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?

Para responder a los cuatro interrogantes antes mencionados diferentes investigadores en el Proyecto de investigación colaborativa sobre Enseñanza para la Comprensión EpC, que ha tenido su origen y desarrollo en la Escuela de Graduados de Educación de Harvard han formulado un marco conceptual para la enseñanza para la comprensión planteando los siguiente elementos con el cual se plantearan las guías de trabajo en la presente investigación.

– Tópicos generativos
– Metas de comprensión
– Desempeños de comprensión
– Evaluación diagnóstica continúa

IV. Etapas de trabajo

Para el desarrollo de la investigación se platearon tres fases

- **Fase 1**: se aplicara la Prueba Saber (pre-test) a los dos grupos escogidos para determinar el nivel de conocimientos que tienen sobre los temas identificando el nivel de aprendizaje de los estudiantes antes de implementar la estrategia didáctica basada en la EpC enseñanza para la comprensión.

- **Fase 2**: al grupo experimental se le aplicará la estrategia didáctica basada en seis guías de aprendizaje diseñadas con la metodología de la Enseñanza para la Comprensión (EpC) en el pensamiento numérico y el grupo control continuará con clases tradicionales empleando la metodología clásica.

- **Fase 3**: se verificará si la metodología de la Enseñanza para la Comprensión EpC es más eficiente que la metodología clásica, aplicando la prueba final post-test para contrastar los resultados y las hipótesis planteadas antes de la intervención.

V. Descripción de la población y muestra

El diseño muestral contempla una poblacion formada por niños y niñas, con edades comprendidas entre los 11 y 13 años muestra que pertenece al Colegio Manuel Cepda Vargas IED (jornada mañana) y que se encuentran (Sampieri, 2000) (Matematicas, 1998, 2006) (Briones) (Godino, 2004) (Monografía, 2010) cursando 6.° grado, son grupos naturales. Esta muestra es un subgrupo de la poblacion, y fue escogida de acuerdo a los objetivos planteados y del esquema de investigacion (Sampieri, Collado y Baptista, 1999).

Este trabajo se desarrolla en el Colegio Distrital Manuel Cepeda Vargas con dos grupos de estudiantes del ciclo tres con características similares, elegidos de manera natural no probabilística, pues corresponden a grupos intactos.

Esta muestra se elige por las siguientes razones:

- La investigadora trabaja desde hace cuatro años en esta institución educativa como docente de planta en el área de matemáticas, teniendo a cargo este año (2013) grado sexto (ciclo 3). El aula de clase, es un salón rectangular de 4,5 metros de ancho por 5 metros de largo, en el cual se encuentran ubicados 31 puestos unipersonales con un tablero ubicado en una de las paredes.

- Se eligieron los cursos 606 (grupo experimental) y 605 (grupo control), estos dos grupos tienen características similares en cuanto a número de estudiantes por curso, edad, estrato social, conformación familiar. Esta información se recolecto mediante una encuesta realizada a cada estudiante y su núcleo familiar.

- El grupo control (605) tiene un total de 31 estudiantes, de los cuales nueve (9) mujeres tienen 12 años, cinco (5) tienen 13, tres (3) tienen 14; y de los hombres, ocho (8) tienen 12 años, cuatro (4) tienen 13, y seis (6) tienen 14. El 41,3% de ellos viven con ambos padres biológicos, el 48,4% viven sólo con la mamá, el 8,9% viven sólo con el papá y el restante 6,4% con otros familiares (p. ej., abuelos). En cuanto al nivel educativo de los padres (hombres), el 65,5% tienen una educación media, el 13,8% una educación universitaria, el 3,4% tan sólo la primaria, el 3,4% no estudió y el 13,9% desconoce el nivel educativo de su padre. En el caso de las madres, el 7,0% cursó la primaria, el 79,1% la media, el 7,0% un nivel universitario y el 6,9% desconoce el nivel educativo de sus madres. La ocupación de los padres corresponde a conductores, vendedores, independientes, amas de casa, operarios, y en muy pocos casos, empresarios y administradores.

Por su parte, el grupo experimental (606) tiene un total de 31 estudiantes; de los cuales doce (12) mujeres tienen 12 años, tres (3) tienen 13, una (1) tiene 14, y en el caso de los hombres, seis (6) tienen 12, seis (6) tienen 13 y (2) dos tienen 14. El 44,0% de ellos vive con sus padres biológicos, el 42,0% viven sólo con la mamá, el 10,0% viven sólo con el papá y el restante 4,0% con otros familiares (p. ej., abuelos). En relación al nivel educativo de los padres, el 79,0% tienen una educación media, el 6,0% una educación universitaria, el 3,0% no estudió y el 12,0% desconoce el nivel educativo de su padre. En el caso de las madres, el 5,2% cursó la primaria, el 93,8% la media y el 1,0% un nivel universitario.

Teniendo en cuenta que en Colombia existen cuatro clases sociales, según el viceministro de empleo y pensiones, Olivera (2012), los pobres, quienes devengan un salario mensual inferior a $800.000, los vulnerables, quienes reciben un sueldo mensual entre $800.000 a $2.000.000, la clase media, con un salario mensual de $2.000.000 a $10.000.000 y la clase alta, con un ingreso mensual superior a $10.000.000. De las familias del grupo control, el 88,6% pertenecen a la clase social pobre y tan sólo el 11,4% se encuentra en la clase vulnerable. Por su lado, del grupo experimental el 93,6 % de las familias a la clase social pobre, mientras que el 6,4% pertenece a la clase vulnerable.

VI. Metodologías trabajadas en el aula

Los dos grupos trabajaron con la misma docente (la investigadora), cada grupo en diferente hora de clase según el horario establecido. Con el grupo control se trabajó como se han venido realizando las clases, empleando la metodología clásica.

Con el grupo experimental se trabajaron con seis guías que contemplan la estrategia de enseñanza para la comprensión que son los siguientes (ver anexos).

Formular aquellas preguntas centrales o fundamentales (hilos conductores) que permitan al docente, centrar las clases buscando lo que considere que sus alumnos deber comprender al finalizar la unidad.

Identificar e incorporar dentro de la unidad tópicos generativos que contengan una rica gama de conexiones significativas con la vida de los estudiantes y con las otras disciplinas, que permitan a los estudiantes involucrarse de manera activa en el proceso al lograr establecer interrelaciones entre conocimientos y sus propia experiencias de vida que resulten centrales para la comprensión y la construcción del razonamiento proporcional.

Formular y articular aquellas actividades (metas de comprensión) que permitan a los estudiantes conexiones entre los conceptos, habilidades e ideas que es importante que comprendan dentro del contexto de la unidad.

Diseñar instrumentos que permitan a los estudiantes aplicar los comprendido, así como también demostrar su nivel de comprensión a través de diferentes formas: formar e informar, oral, escrita y grafica por medios de actuaciones o asumiendo roles, análisis etc.

Determinar y proponer los criterios de evaluación de los desempeños de comprensión y sugerir acciones de retroalimentación del proceso.

El trabajo a desarrollar en el aula tendrá una duración de dos (2) meses distribuidos de la siguiente manera: seis (6) semanas, con dos

(2) sesiones de una hora y cuarenta y cinco minutos cada una, y consideramos dos (2) semanas más en caso de presentarse imprevistos que alteren el buen desarrollo de las guías.

VII. Técnicas e instrumentos

A. Encuesta

Antes de aplicar la prueba de entrada y de iniciar el trabajo de aula, se diseñó y aplicó una encuesta por medio de la cual se recolectó información acerca de la conformación familiar de cada estudiante, lo cual permitió caracterizar la población (ver Anexo 1).

B. Pre-test y post-test

La prueba estandarizada de entrada (pre-test) y de salida (post-test) corresponde a la Prueba Saber (2009) planteada por el Ministerio de Educación Nacional, diseñada por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior –ICFES– y aplicada por la misma entidad a todos los colegios públicos y privados del país. Consta de tres cuadernillos, cada uno de ellos tiene 108 preguntas de dos áreas del conocimiento entre las cuales encontramos: ciencias naturales, ciencias sociales, lenguaje y matemáticas, aunque las preguntas de cada cuadernillo son diferentes, buscan medir los mismos niveles de pensamiento.

Los cuadernillos 1 y 2 corresponden a la Prueba Saber de matemáticas, cada uno consta de 54 preguntas, de ahí se tomaron 20 preguntas del pensamiento numérico para diseñar el pre-test y el pos-test (ver Anexo 2).

Aunque la Prueba Saber se construye y evalúa empleando el modelo de respuestas al ítem, en este trabajo se evaluará de acuerdo al sistema de evaluación del colegio en el cual se desarrolla. El que plantea los siguientes niveles de evaluación:

- Superior: se encuentran los estudiantes cuya nota obtenida pertenece al rango 4,6 - 5,0
- Alto: se encuentran los estudiantes cuya nota obtenida pertenece al rango 3,6 - 4,5
- Básico: se encuentran los estudiantes cuya nota obtenida pertenece al rango 3,0 - 3,5

- Bajo: se encuentran los estudiantes cuya nota obtenida pertenece al rango 1,0 - 2,9

En la prueba, la aproximación que se hace tiene en cuenta las significaciones que el estudiante ha logrado construir y que pone en evidencia cuando se enfrenta con diferentes situaciones problema. En ella se evalúa el significado de los conceptos matemáticos y la práctica significativa, relacionada esta última con la matematización que le exige al estudiante simbolizar, formular, cuantificar, validar, esquematizar, representar, generalizar, entre otros.

Estas actividades le permitirán desarrollar descripciones matemáticas, explicaciones o Construcciones, esto implica indagar por las formas de proceder (las competencias) y por los aspectos conceptuales y estructurales de las matemáticas (los componentes) (MEN).

C. Competencias

La prueba evalúa competencias matemáticas de comunicación, modelación, razonamiento, planteamiento y resolución de problemas, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. En la construcción de las pruebas estas competencias se reagruparon así:

El razonamiento y la argumentación; la comunicación, la representación y la modelación; y el planteamiento y resolución de problemas.

- *El razonamiento y la argumentación*: están relacionados, entre otros, con aspectos como el dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, formular hipótesis, hacer conjeturas, explorar ejemplos y contraejemplos, probar y estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente y plantear preguntas, reconocer distintos tipos de razonamiento y distinguir y evaluar cadenas de argumentos.

- *La comunicación, la representación y la modelación*: están referidas, entre otros aspectos, a la capacidad del estudiante para expresar ideas, interpretar, usar diferentes tipos de representación, describir relaciones matemáticas, relacionar materiales físicos y diagramas con ideas matemáticas, modelar usando lenguaje escrito, oral, concreto, pictórico, gráfico y algebraico, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas, utilizar variables y construir argumentaciones orales y escritas, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones, interpretar lenguaje formal y simbólico y traducir de lenguaje natural al simbólico formal.

- *El planteamiento y resolución de problemas*: se relacionan, entre otros, con la capacidad para formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas, desarrollar, aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas, justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de una respuesta obtenida, verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema.

Los componentes

Para estructurar la prueba se reorganizaron los cinco pensamientos descritos en los lineamientos curriculares y en los estándares básicos de competencias en los tres componentes que se evaluarán: el numérico-variacional, el geométrico-métrico y el aleatorio. Esta división no pretende separar las matemáticas en elementos discretos; por el contrario, estos tienen la intención de proporcionar un esquema de clasificación útil que describe el espectro total de los componentes matemáticos planteados en los estándares. A veces no resulta tan claro clasificar los ítems en una sola categoría de componente, pero al hacerlo se acerca al objetivo de asegurar que los conocimientos y habilidades matemáticas importantes se miden de una manera balanceada.

Solo mencionaremos el componente numérico-variacional puesto que es el objetivo de esta investigación.

- *Numérico-variacional*: indaga por la comprensión de los números y de la numeración, el significado del número, la estructura del sistema de numeración; por el significado de las operaciones, la comprensión de sus propiedades, de su efecto y de las relaciones entre ellas; por el uso de los números y las operaciones en la resolución de problemas diversos, el reconocimiento de regularidades y patrones, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia; por conceptos y procedimientos asociados a la variación directa, a la proporcionalidad, a la variación lineal en contextos aritméticos y geométricos, a la variación inversa y al concepto de función.

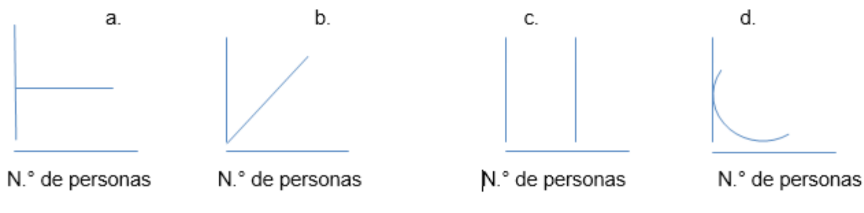
D. Estructura de la Prueba Saber

Competencia comunicación

Numérico-variacional	1. Reconoce significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, entre otros). 2. Reconoce diferentes representaciones de un mismo número. 3. Describe e interpreta propiedades y relaciones de los números y sus operaciones. 4. Traduce relaciones numéricas expresadas gráfica y simbólicamente.

Preguntas evaluadas pre test y post-test

La gráfica que representa la relación entre el número de personas y la cantidad de azúcar a utilizar es



Responde las preguntas 16 y 17 teniendo en cuenta la siguiente informacion

La mamá de Hugo los inscribió durante sus vacaciones en tres cursos que funcionan de domingo a domingo

Pintura	**Guitarra**	**Natación**
Cada 3 días Inicio: 13 de junio	Cada 2 días Inicio: 13 de junio	Cada 6 días Inicio: 13 de junio

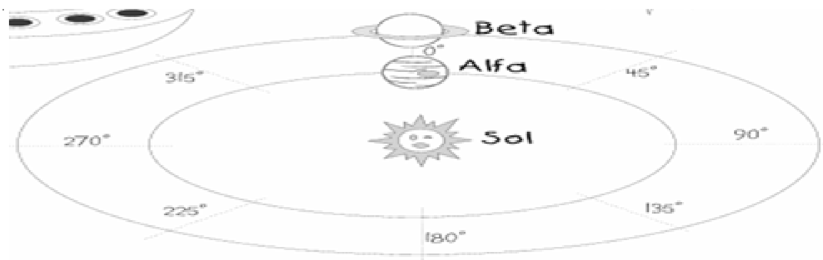
11. ¿Qué días del mes de junio coincidirá sus clases de pintura, natación y guitarra?

a. Junio 13
b. Junio 13, 18, 24, 30
c. Junio 13, 19, 25
d. Junio 13, 15, 17, 19, 21

12. ¿Cada cuántos días tendrá pintura y natación al mismo tiempo Hugo?

a. Cada 3 días
b. Cada 2 días
c. Cada 5 días
d. Cada 6 días

13. Los planetas Alfa y Beta están alineados con el sol. El planeta Beta da una vuelta completa alrededor del sol en 12 años y el planeta Alfa lo hace en 3 años. Si los planetas giran alrededor del Sol en el sentido de las manecillas del reloj, entonces la próxima vez que los planetas vuelven a estar alineados es en:



a. 6 años
b. 12 años
c. 8 años
d. 15 años

Competencia razonamiento

Numérico-variacional	1. Reconoce patrones numéricos. 2. Justifica propiedades y relaciones numéricas usando ejemplos y contraejemplos. 3. Reconoce y genera equivalencias entre expresiones numéricas. 4. Analiza relaciones de dependencia en diferentes situaciones. 5. Usa y justifica propiedades (aditiva y posicional del sistema de numeración decimal).

Preguntas evaluadas pre-test y post-test

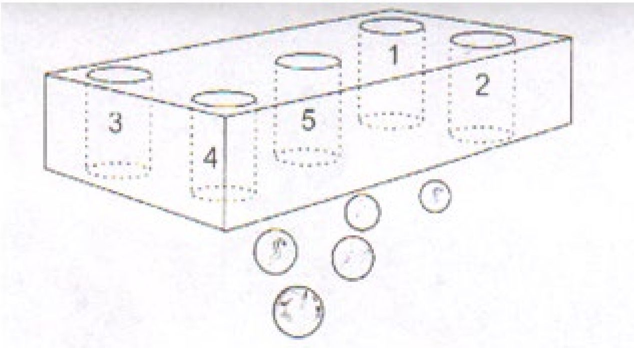
1. En una dulcería se elaboraron distintos empaques para vender dulces. Observa los dibujos.

Doña María quiere comprar quinientos ochenta y cuatro dulces. ¿Cuántas cajas, paquetes y dulces sueltos puede comprar doña María?

a. 4 cajas, 8 paquetes y 5 dulces sueltos.
b. 8 cajas, 5 paquetes y 4 dulces sueltos.
c. 5 cajas, 8 paquetes y 4 dulces sueltos.
d. 5 cajas, 4 paquetes y 8 dulces sueltos.

Responde las preguntas 2 y 3 de acuerdo con la siguiente información

Para jugar cucunubá se usa una caja de cartón, que se coloca en el piso y que tiene cinco huecos, numerados como se muestra en la siguiente figura:



Cada jugador lanza en su turno cinco bolas de cristal (canicas) buscando introducirlas en los huecos. El puntaje de cada jugador se obtiene sumando los valores correspondientes a los huecos donde introduce las canicas.

Juan lanzó las cinco bolas, tres de ellas entraron por el hueco n.° 2, una por el n.° 4 y otra por el n.° 5. El puntaje obtenido por Juan fue:

a.	11	b.	12
c.	15	d.	19

En el segundo turno, Diana obtuvo 12 puntos en tres lanzamientos, en los lanzamientos restantes introdujo las canicas en el hueco n.° 3. Diana en comparación con Juan hizo en el segundo turno:

a. 4 puntos más que Juan
b. 3 puntos más que Juan
c. 4 puntos menos que Juan
d. 3 puntos menos que Juan

15. Un avión hace siempre el mismo trayecto entre dos ciudades. Si en 25 viajes recorre 87.500 kilómetros, entonces los kilómetros que recorre en cada viaje serán:

a. 8.500 km. c. 3.500 km.
b. 4.000 km. d. 6.500 km.

16. Un coyote vive aproximadamente 15 años; pero una ballena azul vive seis veces más que un coyote. Un cocodrilo, vive cuatro veces más que un coyote. Por tanto la ballena azul y el cocodrilo viven

a. 84 y 34 años respectivamente
b. 78 y 98 años respectivamente
c. 90 y 60 años respectivamente
d. 30 y 80 años respectivamente

17. La mitad de lo que tenía lo gasté y un tercio del resto lo perdí. Si todavía me quedan $1.000, inicialmente tenía:

a. $3.000 c. $1.200
b. $6.000 d. $2.000

En la fábrica "delicias de la abuela" se tienen bolsas en las que se pueden empacar 3, 5 o 7 galletas. Si se tienen 973 galletas. ¿en cuál de estas bolsas se pueden empacar sin que sobren galletas?

a. 3
b. 5
c. 7
d. 3 y 7

Responde las preguntas 14 y 15 teniendo en cuenta la siguiente informacion

En una competencia hay 48 niños y 56 niñas, hay que formar grupos con igual cantidad de integrantes de manera que en cada uno la cantidad de niños sea la misma y la cantidad de niñas también.

14. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se puedan armar?

a. 8
b. 4
c. 2
d. 7

15. ¿Cómo estarán conformados los grupos?

a. 6 niñas y 7 niños
b. 7 niñas y 6 niños
c. 6 niñas y 6 niños
d. 7 niños y 7niñas

Competencia resolución

Numérico-variacional	1. Resuelve y formula problemas aditivos de transformación, comparación, combinación e igualación. 2. Resuelve y formula problemas multiplicativos: de adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano. 3. Resuelve y formula problemas de proporcionalidad directa e inversa. 4. Resuelve y formula problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.

Responde las preguntas 4, 5 y 6 de acuerdo con la siguiente información

Sara hace un postre para 12 personas con los siguientes ingredientes: 2 litros de leche, 9 huevos, 600 gramos de azúcar y 1.600 gramos de fruta deshidratada

5. Si desea hacer un postre para cuatro personas, manteniendo la proporción de los ingredientes, podemos afirmar que:

a. Se debe utilizar 150 gramos de azúcar
b. Se debe utilizar 3 huevos
c. Falta información para determinar loa cantidad de cada ingrediente
d. Se deben utilizar 400 gramos de fruta deshidratada.

6. De la relación que se establece entre el número de personas y la cantidad de azúcar a utilizar se puede decir que:

a. No se puede establecer una relación entre las dos variables
b. Se relacionan de manera directamente proporcional
c. Se relacionan de manera inversamente proporcional
d. La relación que se establece entre las dos variables es compuesta, tanto directa como inversa

8. En 1997, había 1.234.127 habitantes en una ciudad y se estimó que el número de habitantes de esa ciudad, diez años después, sería aproximadamente el doble de lo que era en ese año.

En el 2007 se determinó la cantidad de habitantes de cuatro ciudades, dentro de las que se encuentra la ciudad mencionada inicialmente. Los resultados fueron los siguientes:

Ciudad 1: 5.346.757 habitantes
Ciudad 2: 10.123.101 habitantes
Ciudad 3: 2.505.123 habitantes
Ciudad 4: 523.006 habitantes

Si la estimación de 1997 se cumplió, ¿cuál de las cuatro ciudades anteriores tenía 1.234.127 habitantes en 1997?

a. La ciudad 1
b. La ciudad 2
c. La ciudad 3
d. La ciudad 4

9. En un municipio se realizó una jornada de vacunación en la cual se beneficiaron 120 personas. Al analizar los datos de la población vacunada se observó que la cuarta parte eran hombres y de ellos un tercio eran niños. Entonces:

a. Se vacunaron 80 hombres de los cuáles 60 eran niños
b. Se vacunaron 60 hombres de las cuales 20 eran niños
c. Se vacunaron 30 hombres de los cuales 15 eran niños
d. Se vacunaron 30 hombres de los cuales 10 eran niños

18. En 610 hay 24 estudiantes y en 611 hay 28 estudiantes, cada grupo se va a distribuir en grupos con el mismo número de integrantes. ¿Cuál es el máximo número de alumnos que puede tener cada equipo?

a. 2
b. 8
c. 12
d. 4

19. En un juego de baloncesto Cristian convirtió nueve cestas para un total de 25 puntos. El convirtió cestas de dos y tres puntos, pero ninguna de un punto. ¿Cuántas cestas de cada tipo convirtió?

a. 7 de tres puntos y 2 de dos puntos
b. 6 de tres puntos y 3 de dos puntos
c. 5 de tres puntos y 4 de dos puntos
d. 4 de tres puntos y 5 de dos puntos

20. Juanita está cansada que su hermano Carlos, no saque a pasear al perro y siempre tenga que hacerlo ella. Un día, Carlos le hace la siguiente propuesta: si me das una pequeña propina, yo me animaría a hacerlo con mucho gusto. Solo te pido que durante un mes des dos monedas de 100 por el primer día, cuatro por el segundo mes, ocho por el tercero y así sucesivamente, hasta el último día del mes siempre que yo cumpla. Juanita pensó que la oferta no estaba tan mal: por poco dinero podré conseguir que Carlos pasee el perro y aceptó la propuesta sin dudar. ¿Cuánto dinero deberá pagar Juanita a Carlos en el sexto día del trato?

a. Juanita pagará 6.400 pesos a su hermano
b. Juanita pagará 64.000 pesos a su hermano
c. Juanita pagará 640.000 pesos a su hermano
d. Juanita pagará 640 pesos a su hermano

1. Validez de contenido

La Prueba Saber nace en el año 2001 y es una prueba diseñada por un equipo interdisciplinario de expertos conformado por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior –ICFES–, un grupo de delegados del Ministerio de Educación Nacional –MEN–, docentes líderes en educación de las universidades Nacional, Pedagógica, Distrital y Javeriana. Por otro lado, para la validación del material se contó con el apoyo de docentes de colegios públicos y privados.

Durante los años 2002 y 2003 se realizó una prueba censal a los grados quinto y noveno, lo cual dio inicio a la historia de las evaluaciones estandarizadas en el país en estos grados. Los resultados de dichas pruebas fueron enviados a cada institución educativa que participó en su aplicación, posteriormente se organizaron equipos para el análisis de dichos resultados y lograr así una mejor aplicación en el año 2005.

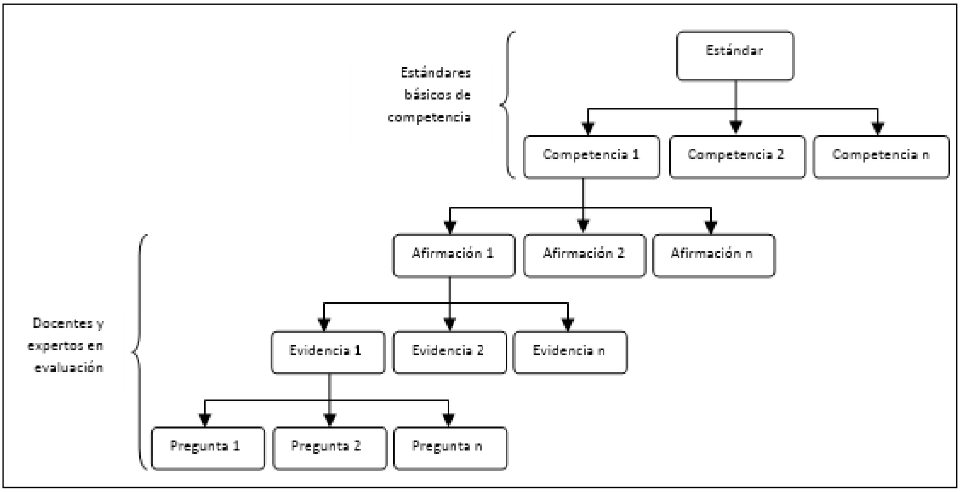
En el año 2009 se realiza la tercera aplicación de la Prueba Saber, en la cual participaron 17.000 colegios públicos y privados del país, para un total de 774.000 estudiantes de quinto y 595.000 de noveno.

En el caso específico de matemáticas, la prueba evaluaba el desempeño de los estudiantes en la solución de problemas de los cinco pensamientos matemáticos: pensamiento numérico, pensamiento geométrico, pensamiento métrico, pensamiento variacional y pensamiento aleatorio.

2. Validez de criterio

Para diseñar las pruebas el equipo encargado utilizó el Modelo Basado en Evidencias –MBE–, iniciando con el planteamiento de las preguntas que servirían de evidencia y muestra de las competencias manejadas por los educandos al enfrentarse a situaciones problemáticas basados en los estándares (2006). El siguiente esquema da muestra del proceso seguido por dicho equipo.

Figura 1
Esquema del proceso seguido en la elaboración de la Prueba Saber



Con este modelo el equipo busca no sólo evaluar de manera masiva, sino alcanzar un alto grado de validez.

3. Control de fuentes de invalidez

Buscando garantizar la validez de los resultados en este proyecto se utilizaron las siguientes estrategias:

- Los grupos experimental y control fueron elegidos de manera natural no probabilística, pues corresponden a grupos intactos en sus ambientes naturales, del Colegio Manuel Cepeda Vargas, grados 605 y 606.

- Se desarrolló el proyecto durante el segundo semestre académico, buscando así que los grupos ya estuvieran bien conformados y evitando que la deserción que se da en el primer y cuarto bimestre afectará el proyecto. De igual manera, en el segundo semestre los estudiantes entran de vacaciones de mitad de año, lo cual garantiza que el trabajo no se vea afectado por el cansancio de los educandos.

- Se escogieron estos grupos porque tienen características similares tanto es su ambiente socioculturaral como en la cantidad de estudiantes por curso, los dos grados tienen la misma cantidad de niños.

Capítulo cuarto
Análisis de datos

I. Recolección de datos de la prueba inicial y prueba final

Al aplicar la prueba de entrada pre-test y de salida post-test se recolectó los resultados de las 20 preguntas de cada uno de los grupos (experimental y control). Esta información se organizó en tablas teniendo en cuenta los resultados por estudiante, a quienes se evaluó teniendo en cuenta el sistema de evaluación del colegio cuya mínima nota es 1 y máxima es 5.

II. Análisis de los resultados con la prueba t-student

El presente proyecto se implementó en el segundo semestre del año escolar, entre los meses de agosto y noviembre del año 2013, en el Colegio Distrital Manuel Cepeda Vargas con los grupos seleccionados con anterioridad, uno de ellos como grupo control (605) y el otro como grupo experimental (606).

En total se trabajó con una docente (la investigadora) y 62 estudiantes, distribuidos así: 31 pertenecientes al grupo experimental y 31 al grupo control, quienes se mantuvieron durante toda la intervención.

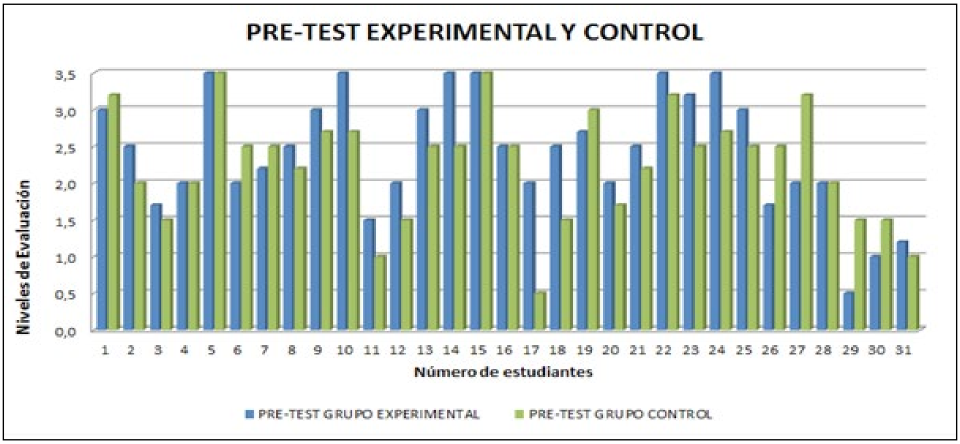
A. Resultados de la prueba pre-test

Esta prueba se aplicó a los dos grupos tanto experimental como control, luego se utilizó la prueba t-Student, con un nivel del 95% de confiabilidad, por lo tanto la significancia deberá ser menor que 0,05. Este análisis se hizo por medio del programa spss. Con ello se busca determinar si existen diferencias significativas en cuanto al rendimiento académico de los dos grupos antes de realizar la intervención.

Este primer resultado es el obtenido por los estudiantes de los dos grupos en el pensamiento numérico. Pre-test

1. Resultados del pre-test, grupo experimental vs. grupo control

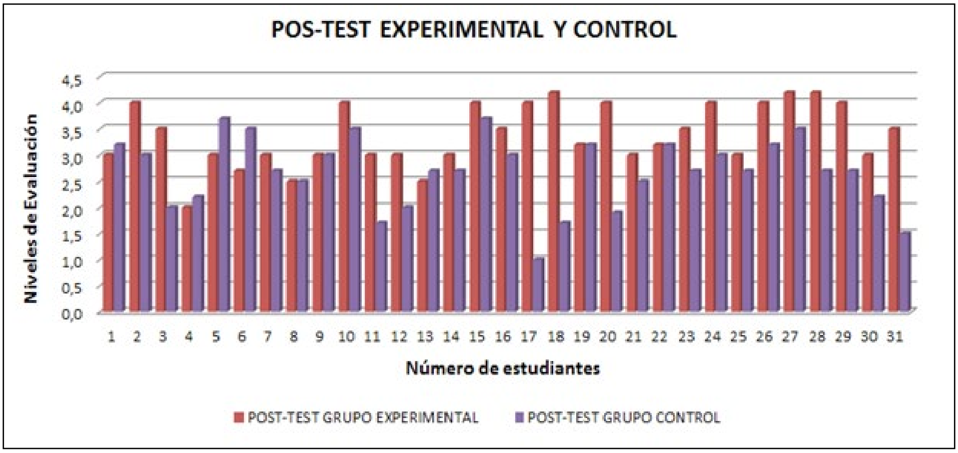
		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Differenc	95% Confidence Interval of the Difference	
		Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower
Pensamiento numérico grupo experimental	Equal variances assumed	0,226	0,637	-0,947	60	0,347	-0,2097	0,2213	-0,6524	0,233
Pensamiento numérico grupo control	Equal variances not assumed			-0,947	59,854	0,347	-0,2097	0,2213	-0,6524	0,233



En la prueba de entrada en el pensamiento numérico la prueba de Levene no es significativa, ya que tenemos *p = 0,226* siendo mayor a 0,05, luego se asumen varianzas iguales. Tomando así t un valor de -,947 con 60 grados de libertad y un nivel crítico asociado de ,947 el cual es mayor que 0,05, permitiendo así aceptar la hipótesis nula, en la cual se plantea igualdad entre las medias, concluyendo así que el aprendizaje significativo de los estudiantes del grupo control y del grupo experimental en cuanto al pensamiento numérico son iguales. Cuyos límites del intervalo de confianza nos muestran que la verdadera diferencia se encuentra entre –0,6524 y 0,2330.

2. Resultados de la prueba post-test, grupo experimental vs. grupo control

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Differenc	95% Confidence Interval of the Difference	
		Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower
Pensamiento numérico grupo experimental	Equal variances assumed	0,763	0,386	5,026	60	0	0,8903	0,1771	0,536	1,2447
Pensamiento numérico grupo control	Equal variances not assumed			5,026	58,266	0	0,8903	0,1771	0,5358	1,2449



Fue presentada por el total de estudiantes elegidos para este proyecto. El estadístico que se utilizó para el análisis de los resultados fue la prueba t Student, con un nivel de confianza del 95%, por lo tanto la significancia deberá ser menor que 0,05. Este análisis se hizo por medio del programa SPSS. Con ello se busca determinar existen diferencias significativas en cuanto al rendimiento académico de los dos grupos antes de realizar la intervención.

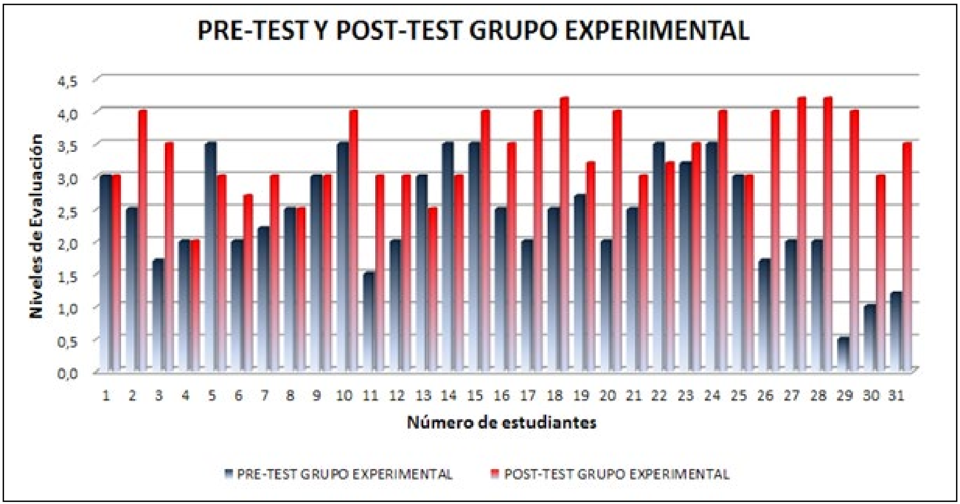
En la prueba de salida en el pensamiento numérico la prueba de Levene toma un valor de 0,386 siendo mayor que 0,05, por lo tanto se asumen varianzas iguales. Siendo t igual a 5,026 con 60 grados de libertad y un nivel crítico asociado de 0,000 el cual es menor que 0,05, permitiendo así rechazar la hipótesis nula, por lo que se asume que no hay igualdad entre las medias, concluyendo que el aprendizaje significativo de los estudiantes del grupo control y del grupo experimental en cuanto al pensamiento numérico en la prueba de salida mejoró y presenta diferencias significativas entre el rendimiento de los dos grupos (control y experimental). Por otra parte, los límites del intervalo de confianza nos muestran que la verdadera diferencia se encuentra entre 0,5360 y 1,2447.

Esto permite rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa puesto que existen diferencias relevantes en cuanto al aprendizaje significativo del grupo control y del grupo experimental.

3. Comparación prueba de entrada vs. prueba de salida

Tabla 3
Contraste prueba de entrada vs. prueba de salida del grupo experimental

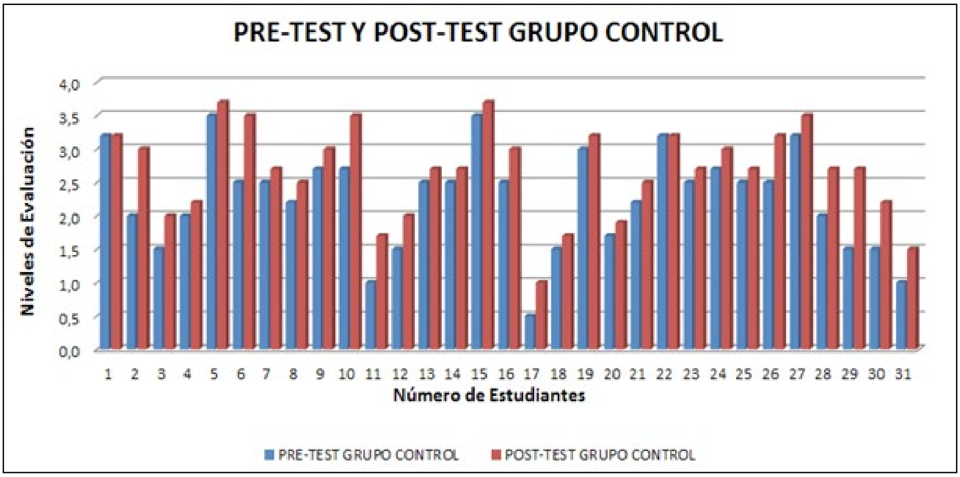
	Test Value = 0					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
Pennupretest	12,925	29	,000	2,0900	1,759	2,421
Pennupostest	30,515	30	,000	3,3484	3,124	3,572



Al analizar los resultados de la tabla anterior, el nivel crítico asociado (bilateral) toma el valor de 0,000 siendo menor que 0,05, por lo tanto podemos concluir que el aprendizaje significativo del grupo experimental aumento significativamente, después de realizar la intervención por medio de la metodología de la enseñanza para la comprensión.

Tabla 4
Comparación prueba de entrada vs. prueba de salida del grupo control

	Test Value = 0					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
Pennupretest	14,734	30	,000	2,2484	1,937	2,560
Pennupostest	18,328	29	,000	2,8300	2,514	3,146



En el caso del grupo control también se obtuvo un aumento significativo en cuanto al rendimiento académico de los estudiantes, ya que el nivel crítico asociado también fue de 0,000. Con ello se puede afirmar que el trabajo de aula por medio de metodología clásica también permite que los estudiantes mejoren su proceso de aprendizaje.

Conclusiones

Los resultados arrojados en el grupo experimental aumento en mayor proporción con respecto al grupo control puesto que el control su mejoría fue mínima de 2,2484 a 2,8300 mientras los el grupo experimental obtuvo una mejoría de 2,0900 a 3,3484 por tanto se acepta la hipótesis alternativa planteada en esta investigación "los estudiantes que recibieron sus conceptos matemáticos por medio de la enseñanza para la comprensión, evidencian aprendizaje significativo superior en comparación a quienes trabajaron bajo la metodología clásica". Evidenciando el éxito de la investigación.

Esta investigación abordo una nueva metodología lo cual fue motivante para los estudiantes, puesto que nos salimos de la rutina y fueron evidentes las diferencias que se presentaron con la metodología clásica que hasta el momento habíamos trabajado en clase.

Los estudiantes del grupo experimental se extrañaron un poco cuando se iniciaron las clases con preguntas (tópicos generativos), algunos me preguntaban cuál era la relación de esas preguntas con matemáticas pero a medida que iban respondiendo se fueron dando cuenta que tanto las preguntas como las respuestas tenían un objetivo y que nos íbamos involucrando hacia la meta de comprensión.

Luego fue un poco complicado que realizaran las actividades en equipo por tanto fue necesario hacer énfasis en el trabajo colaborativo y a media que iban trabajando las guías se fueron emocionado puesto que tenían que realizar procesos de medición donde necesitaban la ayuda de todo su equipo y luego dibujar para emplear la proporcionalidad, las guías que solicitaban manipular material como la de los rectángulos llamo bastante la atención y me preguntaban que porque no habíamos trabajado antes de esta forma. Algunos de los estudiantes al comienzo esperaban a que sus compañeros terminaran para luego copiarse sin tomar medidas ni realizar el material pero a medida que iban avanzando las sesiones se dieron cuenta que era necesario tener sus propio material para no quedarse atrás.

El trabajar con material didáctico y el compartir constante con sus amigos y ver la docente como una guía permitió un avance significativo y en el momento de realizar la evaluación hablaban sin preocuparse por las críticas puesto que todos tenían puntos de vista diferentes pero muy agradables.

Con el grupo control se trabajó el tema de la proporcionalidad pero de la manera clásica donde se imparten conocimientos y luego se colocan tres o más ejercicios sin relacionarlos con la su cotidianidad, los estudiantes trabajando de forma individual y realizaron las actividades planteadas en clase según lo visto en el tablero, hubo una leve mejoría según la prueba aplicada y el análisis que arrojo la t Student.

A lo largo del desarrollo de las sesiones y la aplicación de los instrumentos diseñados para acercar a los estudiantes a un razonamiento proporcional, los registros permitieron analizar qué manera de abordar situaciones donde subyacen razones y proporciones ocurren inicialmente sobre un campo cualitativo, antes que puedan trascenderlo al lenguaje simbólico y cuando surge la necesidad de convalidar sus creencias lo hace con estrategias basadas en conteo, adición y partición y que inicialmente no tienen la intención de comunicar la comparación entre las magnitudes, los procesos que aplican se desarrollan con independencia de la instrucción que existan para el planteamiento de relaciones entre los espacios de medida que se trabajaron.

Una de las particularidades es que los estudiantes emplearon la aplicación de estrategias intra o entre par generar el conjunto de múltiplos de un espacio de medida y su correspondiente imagen en el otro espacio, pues dependiendo del contexto de la situación planteada a los estudiantes generalmente preferían el uso de un estrategia intra a pesar de conocer el operador funcional. Este proceso de selección de la estrategia intra o entre para solucionar proporciones responde también a la facilidad de moverse dentro de un mismo espacio de medida a través de una multiplicación que en ocasiones está compuesta por la unidad, de esta manera el proceso de normación parece más explícito en tanto se construyen las partes y quedan invariantes siendo ahora una unidad compuesta por su mismo número de partes.

Frente a la formación que los estudiantes realizaban para encontrar el valor del IVA para ciertos consumos, la selección del operador

16/100 es un avance significativo a estandarizar una unidad y resolver una proporción donde uno de los términos no sea la unidad (1), sin embargo no hay una conciencia acerca de la solución a una proporción en tanto no se concibe el operador fraccionario como una un entidad en la que subyace la relación “por cada 100 hay 16”, y una razón y por el contrario es interpretada y utilizada como un operador escalar más que funcional.

La comprensión como eje metodológico en el diseño, implementación y desarrollo de las sesiones con los estudiantes permitió generar más apropiación de las cuestiones que ocupaban a cada una de las situaciones y que diferían de otras experiencias de aprendizaje en las cuales los estudiantes no tenían la posibilidad de extrapolar y trascender sus creencias para construir conocimiento en el dominio, la elaboración de actividades de comprensión, partir de la cuales se construyó razonamiento proporcional remitió a los estudiantes a pasar gran parte de su tiempo en actividades que les pedían generalizaciones, encontrar nuevos ejemplos, realizar aplicaciones de una manera reflexiva, con una retroalimentación que les permita un mejor desempeño. También la responsabilidad de resolver una situación por la intención más allá del conocimiento matemático que pueda abordar, es decir brindar las herramientas para desarrollar su proceso de aprendizaje y el desarrollo de las habilidades de comprensión.

La utilidad, intención y propósitos del conocimiento se potenciaron en la medida que son aplicables a su entorno cotidiano y modelación de situaciones reales más vivénciales para él, esto genera la reflexión acerca de la importancia de lo que aprende.

Con la metodología de la enseñanza para la comprensión los estudiantes evidenciaron gusto por las matemáticas dejando atrás su idea de una materia aburrida, además se logró un buen trabajo en equipo, se resaltaron valores como respeto, responsabilidad y vieron a la docente como una guía que les orientaba el trabajo con preguntas esta parte fue muy novedosa para ellos.

El tiempo planeado para el desarrollo de este proyecto inicialmente fue de dos meses pero a medida que se aplicaban los talleres me di cuenta que no era suficiente un bloque de clase y algunas guías se terminaban en la siguiente sesión alargando los tiempos y permitiendo una gran numero de respuestas a las preguntas que llevaba para la clase, muchas veces tuve que innovar puesto que los estudiantes surgían con respuestas inesperadas pero que permitían llegar a un buen desempeño de comprensión, la evaluación se realizaba durante toda la clase y algunas veces se conviertan en debates porque generando una gran participación de los estudiantes y alargando las sesiones.

I. Dificultades presentadas

El trabajo en equipo fue un poco complejo puesto que están acostumbrado a realizarlo individualmente o copiarse del compañero sin generar ningún tipo de esfuerzo.

Al iniciar con la preguntas (tópicos generativos) siempre respondían los mismos estudiantes, además fue complicado escuchar con respeto al que opinaba pero a medida que pasaron las sesiones se llegaron a apoyar mutuamente.

El rechazo de una nueva metodología a los estudiantes les pareció aburrido sin saber de qué se trataba. Puesto que ya están mentalizados a la clásica o tradicional donde el docente juega un papel pasivo y en el momento de cambiar el ejercicio planteado se escuchan frases como" Explica fácil y deja ejercicios difíciles" puesto que no están acostumbrados a actividades donde desarrollen la comprensión.

A pesar de los avances que se evidenciaron en cuanto a la aplicación de procesos de unitización y normación para resolver proporciones no se logró una apropiación y uso de símbolos involucrados en la idea de porcentajes, pues si bien se utiliza el 16/100 para normar el espacio, no se asocia con porcentajes que relacionen más partes del todo y que no sean unitizadas en términos de 16, de esta manera se puede decir que el desarrollo de las sesiones adquiere un papel de transición entre el análisis comprensivo de las relaciones entre dos espacios de medida.

El uso de diferentes formas de representación aumento la comprensión de los conceptos inherentes al tema, el uso de la tabla, por ejemplo permitió reconocer con gran facilidad el operador escalar y/o funcional de forma fácil y rápida.

Debido a la red de conceptos enlazados con el tema de la proporcionalidad, con la propuesta se vieron enriquecidos el estudio de los números racionales, equivalencia de fracciones, los números decimales, la semejanza de figuras, las medidas, y otros muchos temas que fueron atravesados por este concepto que ha sido considerado la piedra angular de las matemáticas superiores, y la cúspide del desarrollo de las matemáticas elementales (Lesh y otros, 1988), además la propuesta encaja perfectamente con los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional, que afirma que los conceptos matemáticos no se deben enseñar de manera aislada.

En concordancia con las afirmaciones hechas por Ausubel en su teoría del aprendizaje significativo, el proceso de aprendizaje es un proceso lento y requiere de largos períodos de tiempo, lo cual sería recomendable continuar con este proceso en el desarrollo de los diferentes pensamientos matemáticos.

II. Recomedanciones

- Continuar trabajando esta metodología (Epc) en diferentes áreas y con los diferentes pensamientos matemáticos permitiendo desarrollar la comprensión en los estudiantes para mejorar sus niveles académicos y obtener una mejor calificación en las pruebas estandarizadas con los que se mide el rendimiento académico.

- Emplear material didáctico en las clases lo que permitirá despertar la motivación y lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes ya que al manipular el material logran adquirir el concepto al cual se pretende llegar.

- Relacionar las clases con su entorno cotidiano ayudará a los estudiantes en la articulación de lo aprendido en el aula con su vida, adquiriendo aprendizaje significativo.

- Relacionar las distintas áreas para llegar a un tema específico como lo fue la proporcionalidad hace que el estudiante despierte el gusto por el saber, retome conceptos previos de los estudiantes y los enlace para lograr el nuevo conocimiento en el área en el cual el docente lo esta guiando.

- Brindar a los estudiantes egresados de la Universidad de Chile espacios que permitan una visualización de los resultados de estos procesos investigativos como participar en eventos académicos y poder llegar a publicar estos resultados evidenciando las modificaciones que se requieran para su cualificación.

- En relación al impacto de este trabajo a nivel investigativo, puede apoyar una fuente de argumentos para continuar consolidando la imagen y el objetivo investigativo de la Universidad de Chile para continuar con esta línea de investigación relacionada con la enseñanza para la comprensión orientada a su utilización como herramienta para el aprendizaje.

Bibliografía

Ausubel, David Paul, Joseph D. Novak y Helen Hanesian. *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*, México, Trillas, 1983.

Briones, Guillermo. *Metodología de la investigación cuantitativa en las ciencias sociales*, Bogotá, icfes, 1996.

Bruner, Jerome S., Jacqueline J. Goodnow y George A. Austin. *A study of thinking*, Nueva Jersey, Transaction Books, 1986.

Dubrovsky, Silvia. "El valor de la teoría socio-histórica de Vigotski para la comprensión de los problemas de aprendizaje escolar", Revista Candidus, año 2, n.° 13, enero-febrero de 2001.

Equipo de Calidad sed. *Competencias básicas. La integración curricular de conocimientos en la propuesta de reorganización en la enseñanza por ciclos en el distrito capital*, Bogotá, Magisterio, 2010.

Gimeno Sacristán, José. "Profesionalización docente y cambio educativo", en Andrea Alliaud y Laura Duschatzky (comps.). *Maestros, formación, práctica y transformación escolar*, 2.ª ed., Miño y Dávila Editores, 1998.

Godino, Juan D. y Carmen Batanero. *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*, Universidad de Granada, 2003. En línea: [http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf].

Guacaneme, Édgar A. "Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas". *Revista ema*, vol. 7, n.° 1, Bogotá, Uniandes, 2002.

Hernández Sampieri, Roberto, Carlos Fernández Collado y Pilar Baptista Lucio. *Metodología de la investigación*, 4.ª ed., Mexico, McGraw-Hill, 2006.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior. *Pruebas Saber*, Bogotá, Sistema Nacional de Evaluación, 2006.

Ministerio de Educación Nacional. *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*, Bogotá, men, 2006.

Ministerio de Educación Nacional. *Estándares para la excelencia en la educación. Estándares curriculares para las áreas de matemáticas, lengua castellana, ciencias naturales y educación ambiental para la educación preescolar, básica y media. Documento de estudio*, Bogotá, men, 2010.

Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos curriculares*, Bogotá, men, 1998.

Jave Chiclote, Paulino Humberto. *El rendimiento académico en matemáticas y comunicación*, Perú, 2010.

Piaget, Jean. *El criterio moral en el niño*, París, Alcan, 1932.

Perrenoud, Philippe. *Los ciclos de aprendizaje: un camino para combatir el fracaso escolar*, Bogota, Magisterio, 2010.

Romero, Julio Hernando, Gloria García e Ivonne Tatiana Niño. *El papel de los textos escolares de matemáticas en la implementación de los lineamientos curriculares: el caso del razonamiento multiplicativo*. Conferencia presentada en 9.° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia.

Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*, Bogotá, Panamericana, 1999.

Stone Wiske, Martha (comp.). “¿Qué es la enseñanza para la comprensión?”, en *La enseñanza para la comprensión*, Buenos Aires: Paidós.

Vergnaud, Gérard. *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, México, Trillas, 1991.

Anexos

I. Encuesta

CED MANUEL CEPEDA VARGAS
ABRIL DE 2013
CARACTERIZACIÓN DE LA POBLACIÓN ESTUDIANTIL

Nombre: ________________________________ Curso: ________ Edad: ______

1. Marque con una X si vive con:

Madre biológica ___ Padre biológico: ___ Abuelos: __ Otros: ___

2. Vive en casa o apartamento:

Propia ___ Arriendo: ___

3. Estrato social del lugar donde vive: __________

4. Marque con una X el último nivel educativo alcanzado por los padres

	Sin estudio	Primaria	Secundaria	Universidad
Padre				
Madre				

5. Ocupación de los padres (especifique en qué trabajan sus padres):

Madre ________________________________

Padre ________________________________

Gracias por su valiosa información

II. Pre-test

- Llene sus datos personales antes de comenzar la prueba.
- Cuando su profesora le indique, usted dispondrá de 60 minutos para desarrollar la prueba.
- Esta es una prueba de selección múltiple. Cada problema está seguido por cuatro opciones de respuesta marcadas a, b, c y d. Sólo una de éstas es correcta.
- Marque la opción que usted considere correcta.

Nombre_______________________________________ Curso______

1. En 1997, había 1.234.127 habitantes en una ciudad y se estimó que el número de habitantes de esa ciudad, diez años después, sería aproximadamente el doble de lo que era en ese año.

En el 2007 se determinó la cantidad de habitantes de cuatro ciudades, dentro de las que se encuentra la ciudad mencionada inicialmente. Los resultados fueron los siguientes:

Ciudad 1: 5.346.757 habitantes
Ciudad 2: 10.123.101 habitantes
Ciudad 3: 2.505.123 habitantes
Ciudad 4: 523.006 habitantes

Si la estimación de 1997 se cumplió, ¿cuál de las cuatro ciudades anteriores tenía 1.234.127 habitantes en 1997?

a. La ciudad 1
b. La ciudad 2
C. La ciudad 3
D. La ciudad 4

Responde las preguntas 2 y 3 teniendo en cuenta la siguiente información

La mama de Hugo los inscribió durante sus vacaciones en tres cursos que funcionan de domingo a domingo

Pintura	**Guitarra**	**Natación**
Cada 3 días Inicio: 13 de junio	Cada 2 días Inicio: 13 de junio	Cada 6 días Inicio: 13 de junio

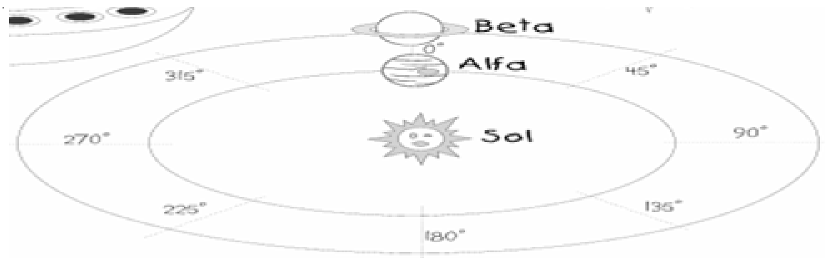
2. ¿Qué días del mes de junio coincidirá sus clases de pintura, natación y guitarra?

a. Junio 13
b. Junio 13, 18, 24, 30
c. Junio 13, 19, 25
d. Junio 13, 15, 17, 19, 21

3. ¿Cada cuántos días tendrá pintura y natación al mismo tiempo Hugo?

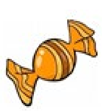
a. Cada 3 días
b. Cada 2 días
c. Cada 5 días
d. Cada 6 días

4. Los planetas Alfa y Beta están alineados con el sol. El planeta Beta da una vuelta completa alrededor del sol en 12 años y el planeta Alfa lo hace en 3 años. Si los planetas giran alrededor del Sol en el sentido de las manecillas del reloj, entonces la próxima vez que los planetas vuelven a estar alineados es en



a. 6 años
b. 12 años
c. 8 años
d. 15 años

5. En una dulcería se elaboraron distintos empaques para vender dulces. Observa los dibujos.


Un dulce.


Un paquete: contiene 10 dulces.

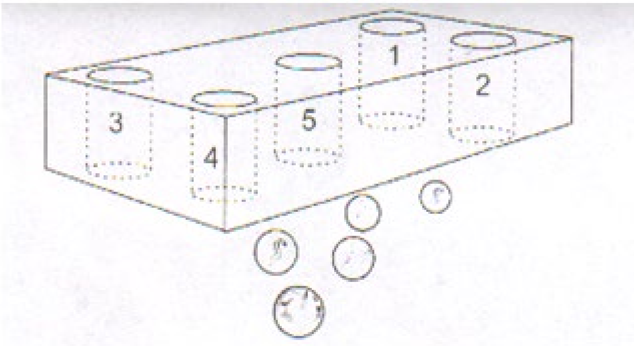

Una caja: 10 paquetes de dulces.

Doña María quiere comprar quinientos ochenta y cuatro dulces. ¿Cuántas cajas, paquetes y dulces sueltos puede comprar doña María?

a. 4 cajas, 8 paquetes y 5 dulces sueltos
b. 8 cajas, 5 paquetes y 4 dulces sueltos
c. 5 cajas, 8 paquetes y 4 dulces sueltos
d. 5 cajas, 4 paquetes y 8 dulces sueltos

Responde las preguntas 6 y 7 de acuerdo con la siguiente información

Para jugar Cucunubá se usa una caja de cartón, que se coloca en el piso y que tiene 5 huecos, numerados como se muestra en la siguiente figura:



Cada jugador lanza en su turno cinco bolas de cristal (canicas) buscando introducirlas en los huecos. El puntaje de cada jugador se obtiene sumando los valores correspondientes a los huecos donde introduce las canicas.

6. Juan lanzó las cinco bolas, tres de ellas entraron por el hueco n.° 2, una por el n.° 4 y otra por el n.° 5. El puntaje obtenido por Juan fue:

a.	11	b.	12
c.	15	d.	19

7. En el segundo turno, Diana obtuvo 12 puntos en tres lanzamientos, en los lanzamientos restantes introdujo las canicas en el hueco n.° 3. Diana en comparación con Juan hizo en el segundo turno:

a. 4 puntos más que Juan
b. 3 puntos más que Juan
c. 4 puntos menos que Juan
d. 3 puntos menos que Juan

8. Un avión hace siempre el mismo trayecto entre dos ciudades. Si en 25 viajes recorre 87.500 kilómetros, entonces los kilómetros que recorre en cada viaje serán:

a.	8.500 km.	c.	3.500 km.
b.	4.000 km.	d.	6.500 km.

9. Un coyote vive aproximadamente 15 años; pero una ballena azul vive seis veces más que un coyote. Un cocodrilo, vive cuatro veces más que un coyote. Por tanto la ballena azul y el cocodrilo viven:

a. 84 y 34 años respectivamente
b. 78 y 98 años respectivamente
c. 90 y 60 años respectivamente
d. 30 y 80 años respectivamente

10. La mitad de lo que tenía lo gasté y un tercio del resto lo perdí. Si todavía me quedan $1.000, inicialmente tenía:

a.	$3.000	c.	$1.200
b.	$6.000	d.	$2.000

11. En la fábrica "delicias de la abuela" se tienen bolsas en las que se pueden empacar 3, 5 o 7 galletas. Si se tienen 973 galletas. ¿En cuál de estas bolsas se pueden empacar sin que sobren galletas?

a. 3
b. 5
c. 7
d. 3 y 7

Responde las preguntas 12 y 13 teniendo en cuenta la siguiente información

En una competencia hay 48 niños y 56 niñas, hay que formar grupos con igual cantidad de integrantes de manera que en cada uno la cantidad de niños sea la misma y la cantidad de niñas también.

12. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se puedan armar?

a. 8
b. 4
c. 2
d. 7

13. ¿Cómo estarán conformados los grupos?

a. 6 niñas y 7 niños
b. 7 niñas y 6 niños
c. 6 niñas y 6 niños
d. 7 niños y 7niñas

Responde las preguntas 14, 15 y 16 de acuerdo con la siguiente información

Sara hace un postre para 12 personas con los siguientes ingredientes: 2 litros de leche, 9 huevos, 600 gramos de azúcar y 1.600 gramos de fruta deshidratada.

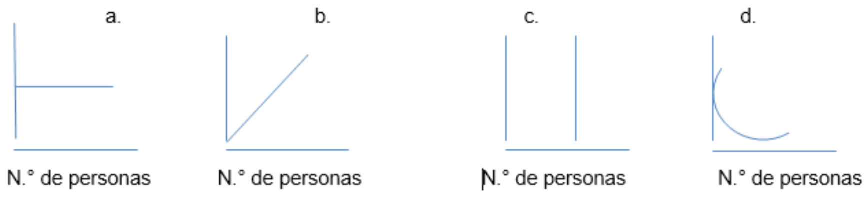
14. Si desea hacer un postre para cuatro personas, manteniendo la proporción de los ingredientes, podemos afirmar que:

a. Se debe utilizar 150 gramos de azúcar
b. Se debe utilizar 3 huevos
c. Falta información para determinar loa cantidad de cada ingrediente
d. Se deben utilizar 400 gramos de fruta deshidratada

15. De la relación que se establece entre el número de personas y la cantidad de azúcar a utilizar se puede decir que:

a. No se puede establecer una relación entre las dos variables
b. Se relacionan de manera directamente proporcional
c. Se relacionan de manera inversamente proporcional
d. La relación que se establece entre las dos variables es compuesta, tanto directa como inversa

16. La grafica que representa la relación entre el número de personas y la cantidad de azúcar a utilizar es:



17. En un municipio se realizó una jornada de vacunación en la cual se beneficiaron 120 personas. Al analizar los datos de la población vacunada se observó que la cuarta parte eran hombres y de ellos un tercio eran niños. Entonces:

a. Se vacunaron 80 hombres de los cuáles 60 eran niños
b. Se vacunaron 60 hombres de las cuales 20 eran niños
c. Se vacunaron 30 hombres de los cuales 15 eran niños
d. Se vacunaron 30 hombres de los cuales 10 eran niños

18. En 610 hay 24 estudiantes y en 611 hay 28 estudiantes cada grupo se va a distribuir en grupos con el mismo número de integrantes ¿Cuál es el máximo número de alumnos que puede tener cada equipo?

a. 2
b. 8
c. 12
d. 4

19. En un juego de baloncesto Cristian convirtió nueve cestas para un total de 25 puntos. El convirtió cestas de dos y tres puntos, pero ninguna de un punto. ¿Cuántas cestas de cada tipo convirtió?

a. 7 de tres puntos y 2 de dos puntos
b. 6 de tres puntos y 3 de dos puntos
c. 5 de tres puntos y 4 de dos puntos
d. 4 de tres puntos y 5 de dos puntos

20. Juanita está cansada que su hermano Carlos, no saque a pasera al perro y siempre tenga que hacerlo ella. Un día, Carlos le hace la siguiente propuesta: Si me das una pequeña propina, yo me animaría a hacerlo con mucho gusto. Solo te pido que durante un mes des dos monedas de 100 por el primer día, cuatro por el segundo mes, ocho por el tercero y así sucesivamente, hasta el último día del mes siempre que yo cumpla. Juanita pensó que la oferta no estaba tan mal: por poco dinero podré conseguir que Carlos pasee el perro y acepto la propuesta sin dudar. ¿Cuánto dinero deberá pagar Juanita a Carlos en el sexto día del trato?

a. Juanita pagara 6.400 pesos a su hermano
b. Juanita pagara 64.000 pesos a su hermano
c. Juanita pagara 640.000 pesos a su hermano
d. Juanita pagara 640 pesos a su hermano

III. Lectura introductoria

“La aventura de los 35 camellos”
(tomada del libro *El hombre que calculaba*)

Cerca de un viejo albergue de caravanas medio abandonado, vimos tres hombres que discutían acaloradamente junto a un hato de camellos. Entre gritos e improperios, en plena discusión, braceado como posesos, se oían exclamaciones:

- ¡Que no puede ser!

- ¡Es un robo!

- ¡Pues yo no estoy de acuerdo!

El inteligente Beremiz procuró informarse de lo que discutían.

- Somos hermanos, explicó el más viejo, y recibimos como herencia esos 35 camellos.

Según la voluntad expresa de mi padre, me corresponde la mitad, a mi hermano Hamed Namur una tercera parte y a Harim, el más joven, solo la novena parte. No sabemos, sin embargo, cómo efectuar la partición y a cada reparto propuesto por uno de nosotros sigue la negativa de los otros dos. Ninguna de las particiones ensayadas hasta el momento, nos ha ofrecido un resultado aceptable. Si la mitad de 35 es 17 y medio, si la tercera parte y también la novena de dicha cantidad tampoco son exactas ¿cómo proceder a tal partición?

- Muy sencillo, dijo el Hombre que Calculaba. Yo me comprometo a hacer con justicia ese reparto, más antes permítanme que una a esos 35 camellos de la herencia este espléndido animal que nos trajo aquí en buena hora. En este punto intervine en la cuestión.

- ¿Cómo voy a permitir semejante locura? ¿Cómo vamos a seguir el viaje si nos quedamos sin el camello?

- No te preocupes, Bagdalí, me dijo en voz baja Beremiz. Sé muy bien lo que estoy haciendo. Cédeme tu camello y verás a que conclusión llegamos. Y tal fue el tono de seguridad con que lo dijo que le entregué sin el menor titubeo mi bello jamal, que, inmediatamente, pasó a incrementar la cáfila que debía ser repartida entre los tres herederos.

- Amigos míos, dijo, voy a hacer la división justa y exacta de los camellos, que como ahora ven son 36. Y volviéndose hacia el más viejo de los hermanos, habló así: 66 propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad

- Tendrías que recibir, amigo mío, la mitad de 35, esto es: 17 y medio. Pues bien, recibirás la mitad de 36 y, por tanto, 18. Nada tienes que reclamar puesto que sales ganando con esta división.

Y dirigiéndose al segundo heredero, continuó:

- Y tú, Hamed, tendrías que recibir un tercio de 35, es decir 11 y poco más. Recibirás un tercio de 36, esto es, 12. No podrás protestar, pues también tú sales ganando en la división. Y por fin dijo al más joven:

- Y tú, joven Harim Namur, según la última voluntad de tu padre, tendrías que recibir una novena parte de 35, o sea 3 camellos y parte del otro. Sin embargo, te daré la novena parte de 36 o sea, 4. Tu ganancia será también notable y bien podrás agradecerme el resultado. Y concluyó con la mayor seguridad:

- Por esta ventajosa división que a todos ha favorecido, corresponden 18 camellos al primero, 12 al segundo y 4 al tercero, lo que da un resultado 18 + 12 + 4 de 34 camellos. De los 36 camellos sobran por tanto dos. Uno, como saben, pertenece al badalí, mi amigo y compañero; otro es justo que me corresponda, por haber resuelto a satisfacción de todos el complicado problema de la herencia.

- Eres inteligente, extranjero, exclamó el más viejo de los tres hermanos, y aceptamos tu división con la seguridad de que fue hecha con justicia y equidad.

Y el astuto Beremiz –el Hombre que Calculaba– tomó posesión de uno de los más bellos jamales del hato, y me dijo entregándome por la rienda el animal que me pertenecía:

- Ahora podrás, querido amigo, continuar el viaje en tu camello, manso y seguro. Tengo otro para mi especial servicio. Y seguimos camino hacia Bagdad.

IV. Instrumento n.° 1

Hilo conductor

Dibujar es una actividad que muchas personas disfrutamos. ¿Hay alguna relación entre las matemáticas y el dibujo? ¿Pueden las matemáticas ayudarnos cuando hacemos un dibujo? ¿Cómo hacer para copiar un dibujo en un tamaño diferente?

Tópicos generativos

- Dibujar objetos a gran escala
- Elaborar planos utilizando escalas

Meta de comprensión

1. Discutimos sobre estas preguntas
    a. Cuando hablamos de un dibujo a escala ¿a qué nos referimos?
    b. ¿Cuál es la diferencia en cuánto al tamaño entre una fotografía y el objeto real?

2. Vamos a hacer una copia ampliada del siguiente dibujo. Seguimos las instrucciones:
    a. Para no rayar nuestra guía, pedimos a nuestra profesora una copia de este dibujo.
    b. Hacemos marcas cada centímetro sobre el marco del dibujo y tomamos la medida del ancho y el alargo del mismo.
    c. Trazamos sobre el dibujo una cuadricula utilizando las marcas hechas anteriormente.
    d. En nuestro cuaderno trazamos una cuadricula que tenga la misma cantidad de cuadros a los ancho y a lo largo pero aumentamos al donde la longitud del lado de cada cuadrado.
    e. En la nueva cuadricula reconstruimos el dibujo cuadro por cuadro y prestando mucha atención a los detalles.

3. Respondemos las siguientes preguntas:
   a. ¿Qué similitudes y diferencias tienen el nuevo dibujo con respecto al original?
   b. ¿Cuantas veces es más grande el nuevo dibujo con respecto al original?

Las escalas

El nuevo dibujo resulta ser semejante al original ya que conserva las proporciones entre cada una de sus partes, pero cada dimensión es dos veces más grande. En esta actividad se realizó una ampliación del plano original.

En términos de escalas de ampliación se escribe 2:1 y se lee “escala de dos a uno” Esto quiere decir que es dos veces más grande que el plano original, pues aumento en el doble de su ancho y su largo.

Las escalas de medidas son muy utilizadas en la vida diaria para hacer maquetas, planos y mapas, entre otros. Las escalas se escriben en forma de razón o fracción, donde el numerador indica el valor del plano y el denominador el valor de la realidad. Por ejemplo,

La escala 1:500 significa que 1 unidad del plano equivale a 500 unidades en la realidad.

4. Respondemos las siguientes preguntas:
   a. ¿Qué significa que un plano tenga una escala 1:2?
   b. ¿A qué tipo de escala pertenece la escala 10:1? ¿En qué situaciones se debe utilizar?
   c. ¿Cuál es la diferencia entre la escala 1:2 y la escala 2:1?

V. Instrumento n.° 2

Hilo conductor

Dibujar es una actividad que muchas personas disfrutamos. ¿Hay alguna relación entre las matemáticas y el dibujo? ¿Pueden las matemáticas ayudarnos cuando hacemos un dibujo? ¿Cómo hacer para copiar un dibujo en un tamaño diferente?

Tópico generativo

- Interpretar las escalas utilizadas en los mapas

Meta de comprensión (1)

1. Traemos una cinta métrica y un mapa de Colombia
    a. Observamos en el mapa en recuadro de las convenciones y comentamos lo que significa cada una de ellas.
    b. Localizamos la convención que informa la escala que maneja el mapa y determinamos la cantidad de kilómetros que están representados por cada centímetro del mapa.
    c. Utilizamos la cinta métrica para medir la distancia en línea recta entre Bogotá y Cali. Escribimos el resultado de la medición en la hoja.
    d. Calculamos los kilómetros que hay en línea recta entre las ciudades de Bogotá y Cali, utilizando la escala de medida.

Leemos y analicemos el siguiente texto

En la mayoría de los mapas aparece un segmento graduado que es la convención utilizada para indicar las escalas en que ha sido elaborado. Allí se indica la equivalencia en kilómetros por cada centímetro del mapa. Para calcular la distancia real entre dos puntos, debemos medir la distancia en el mapa y multiplicarla por la escala. En forma contraria, para pasar de la distancia real a la representación sobre el mapa debemos dividirla por la escala. Hay que tener en cuenta que siempre obtendremos resultados en a las unidades en al que hayamos tomado medidas.

Con escalas entre 1:5.000 y 1:20.000 podemos representar planos callejeros de ciudades. Entre 1:20.000 y 1:50.000 podemos representar comarcas y municipios. Entre 1:50.000 y 1:200.000 podemos representar regiones y carreteras. Entre 1:200.000 y 1:1.000.000, podemos representar los países y sus divisiones. A escalas mayores a 1:1.000.000 podemos representar continentes y hasta el mundo entero.

2. Elaboramos un plano del salón de clase
    a. Utilizamos la cinta métrica para medir el salón
    b. Utilizamos la escala 1:100 para elaborar el plano del salón, para ello dividimos cada longitud entre 100.

3. Cuando se quiere elaborar el plano de un objeto o de una estructura, se deben tomar las medidas de sus dimensiones reales, para liego transformarlas a la escala en el que se va a representar. Esto se hace multiplicando la medida por la fracción que indica la escala. Por ejemplo:

Si la escala es 1:2, se debe multiplicar cada medida real por 1/2, Si la escala es 1:50, se debe multiplicar cada medida por 1/50.

En el caso del plano del salón, si la longitud de uno de los lados es 600cm, al hacerlo a escala 1:100, se debe multiplicar así: 600 • 1/2 = 6.

Toda fracción indica una división, por lo tanto 600/100 =6. Esto quiere decir que uno de los lados del plano del salón debe tener 6 cm.

4. Responde:

a. Teniendo en cuenta la actividad anterior. ¿Cuál será la longitud de los lados del plano del salón de clases so se quiere hacer una escala 1:50?
b. ¿Qué procedimiento se debe seguir si se quiere hacer una ampliación 2:1 del circuito interno de un celular?

Meta de comprensión (2)

Si en el grupo 605 hay 24 niñas y 12 niños y queremos comparar estos dos números, podemos hacerlo de dos modos distintos. Un modo puede ser restar 12 de 24 y diremos: hay 12 chicas más que chicos, y será una comparación por diferencia; otro modo es dividiendo 24 entre 12 y diremos: hay el doble de chicas que de chicos. Se habrá hecho entonces una comparación por cociente. Este cociente se llama razón de una de estas cantidades a la otra.

Para los siguientes casos, comparemos las cantidades por diferencia y por cociente:

1. En una estación de gasolina habían 12 buses y 36 taxis
2. En una caja de cuerpos sólidos habían 7 prismas y 21 pirámides

Comparación por diferencia:

___

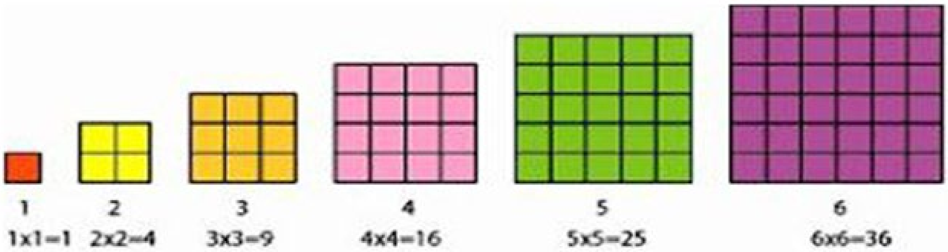
Comparación por cociente:

___

3. Determina el lado L, el perímetro P, y el área A de cada uno de los siguientes cuadrados:

Cuadrado	Lado (L)	Área (A)	Perímetro (P)
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Con los datos obtenidos completa la siguiente tabla y escriban sus conclusiones



	1	2	3	4	5	6
P-L						
P/L						

VI. Instrumento n.° 3

Hilo conductor

Dibujar es una actividad que muchas personas disfrutamos. ¿Hay alguna relación entre las matemáticas y el dibujo? ¿Pueden las matemáticas ayudarnos cuando hacemos un dibujo? ¿Cómo hacer para copiar un dibujo en un tamaño diferente? ¿Cómo medimos la altura de un árbol?

Tópico generativo

Resuelve problemas utilizando las proporciones en contextos reales de su vida diaria Identifica la proporcionalidad en contextos reales.

Meta de comprensión (1)

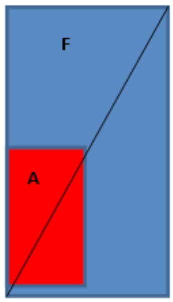
En esta actividad vamos a utilizar materiales como cartulina, tijeras, regla.

Empleamos la cartulina para recortar rectángulos que tengan las medidas que aparecen en la siguiente tabla:

Rectángulo	Ancho	Largo
A	20 cm.	16 cm.
B	24 cm.	15 cm.
C	16 cm.	16 cm.
D	10 cm.	6 cm.
E	18 cm.	12 cm.
F	10 cm.	8 cm.
G	15 cm.	9 cm.
H	16 cm.	10 cm.
I	6 cm.	4 cm.
J	8 cm.	8 cm.

Generalmente en un rectángulo, el lado de mayor longitud corresponde al largo y el de menor longitud al ancho

Buscamos entre los rectángulos que hemos recortado dos que nos parezcan semejantes. Es decir, que uno de ellos sea una ampliación del otro. Una forma de hacerlo es sobreponer un rectángulo pequeño sobre otro más grande en una de las esquinas y comprobar si sus vértices se encuentran alineados entre sí, como lo muestra la figura.



En la hoja que la profesora les entrega completa la tabla.

Escribe las parejas del rectángulo que son semejantes.

A	B	C	D	E	F
F					

Tomamos las parejas de rectángulos, analizamos y respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Qué relación hay ente el ancho del rectángulo A y el ancho del rectángulo F?
2. ¿Qué relación hay entre el largo del rectángulo A y el largo del rectángulo F?
3. ¿Se puede decir que el rectángulo F es una reducción a escala del rectángulo A?
4. ¿Cuál es la razón entre el largo del rectángulo B y el largo del rectángulo H? ¿Cuál es la razón entre los anchos de estos rectángulos?
5. ¿Se puede afirmar que el rectángulo H es una reducción a escala del rectángulo B? ¿Por qué?

6. ¿Los lados del rectángulo B son proporcionales a los lados del rectángulo H?
7. ¿Cuál rectángulo es semejante al rectángulo D? ¿Por qué?

Meta de comprensión (2)

Materiales: pitillo, hilo o cuerda, una masa (piedra pequeña, un tornillo o una tuerca), cartón, bisturí o tijeras, regla, lápiz o lapicero.

Hace muchos años en Grecia, un país muy alejado del nuestro, un hombre a quien llamaban Tales, observó que todos los días el sol "aparecía" por el oriente y se "ocultaba" por el occidente. También observó que en un día soleado la luz que provenía del sol, cuando llegaba a su cuerpo producía una sombra de longitud que dependía de la posición, en la cual estuviese ubicado el sol en ese momento.

Esta observación lo motivó muchísimo, fue así como valiéndose de ella y de unos principios matemáticos básicos llegó a calcular la altura de una pirámide, y la distancia a la que se encontraban los objetos lejanos.

Vamos ahora a construir un modelo sencillo de teodolito:

Sobre el cartón construye y recorta un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa sea aproximadamente de 20 cm. Sobre la hipotenusa y con cinta adhesiva, fija un pitillo (de los usados para tomar gaseosa), toma un trozo de hilo y en uno de los extremos amarra la masa (recuerda que esta puede ser una piedra pequeña, un tornillo, una tuerca o cualquier cosa que se te ocurra). Perfora uno de los extremos de la hipotenusa, por esta perforación introduce el extremo libre del hilo y amárralo de modo que quede fijo.

¿Cómo son los ángulos del triángulo que acabas de construir?

El modelo sencillo de teodolito que acabas de construir te servirá para calcular con mucha aproximación la altura de los árboles, montañas, edificios, astas de banderas, en fin cualquier objeto cuya altura deseen calcular.

Existen muchos métodos para calcular la altura de objetos, en especial de árboles, todos ellos dan muestra de lo ingeniosas y sencillas que pueden ser las soluciones dadas a un problema, pero lo mejor, es que todos los métodos están basados en el mismo principio matemático.

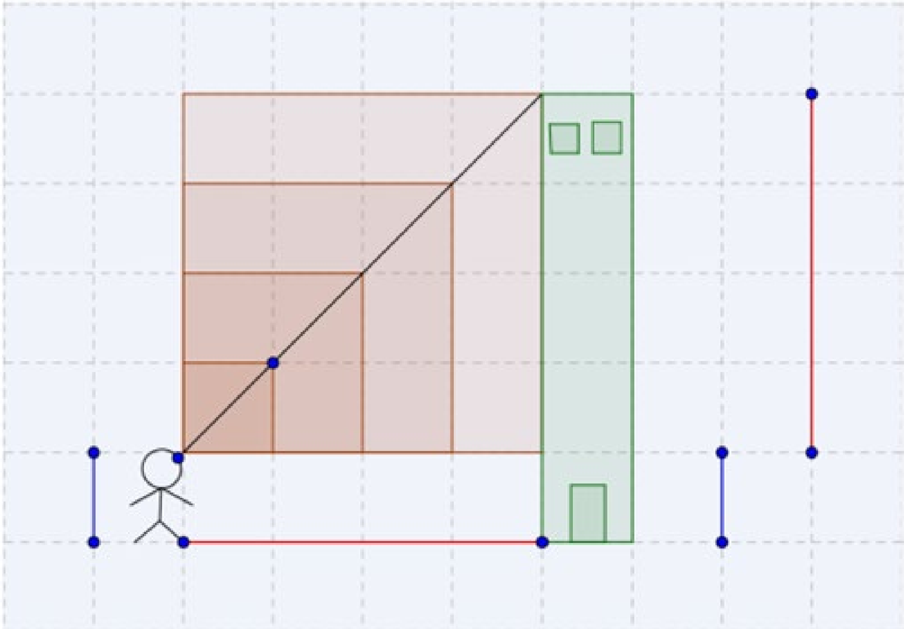
Ahora a medir un arbol...

Con el teodolito, deben medir la altura aproximada de uno de los árboles que están en la sesión de primaria cerca a la entrada del colegio, ellos se encuentran numerados de izquierda a derecha, seleccionen uno y llevan a cabo los siguientes pasos:

• Un estudiante toma en sus manos el teodolito y a través de la mira (el pitillo), enfoca la parte más alta del árbol.

• El compañero de equipo por su parte, debe fijarse que la plomada este paralela a uno de los lados del teodolito y perpendicular al otro, de tal manera que debe orientar al estudiante que maneja el instrumento para que se acerque o se aleje hasta lograr la perpendicularidad con la plomada.

• Para finalizar su compañero de equipo mide la distancia en pasos naturales (como de costumbre camina) desde el sitio donde está ubicad el estudiante con el instrumento, hasta el pie del árbol. Se toma nota de la medida en pasos y de la estatura de la estudiante que realizo la medición.



VII. Instrumento n.° 4

Hilo conductor

¿Qué entendemos por proporción? ¿En nuestra vida diaria donde empleamos la proporción?

Tópicos generativos

- Identifica la proporcionalidad empleando contextos geométricos.
- Emplea la proporcionalidad en contextos reales como compras.
- Aplica en la proporcionalidad en situaciones reales.

Recuerda

Una proporción es una igualdad entre dos magnitudes.
En forma general se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Si a/b = c/d entonces a • d = b • c

Meta de comprensión (1)

1. Completa las tablas, para ello encuentra la longitud del lado que hace falta para obtener dos rectángulos semejantes, explica tu procedimiento.

	Rectángulo 1	Rectángulo 2
Ancho	3 cm	6 cm
Largo	4 cm	

	Rectángulo 1	Rectángulo 2
Ancho	4 cm	
Largo	6 cm	72 cm

2. Lee con atención la siguiente situación y responde.

Es muy común observar en el comercio avisos como el siguiente:

- ¿Qué significa este aviso?
- Si compara un artículo cuyo costo es de $16.000, ¿cuánto dinero me descontarían?

Aplicaciones de las proporciones

Las proporciones son útiles para resolver problemas que tienen que ver con porcentajes. Para calcular cual será el descuento del 20% en un artículo que vale $16.000 utilizo la proporción así.

El valor total lo asociamos con el 100% y el descuento lo asociamos con el 20%

100%	es a	$16.000 como
20%	es a	¿X?

En forma de proporción

a/b = c/d   así   100% / 20% = 16.000 / X

La letra X representa el número que desconocemos, es decir el descuento. Como sabemos, en toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios. En este caso los extremos son 100 y el valor desconocido X mientras que los medios son 16.000 y 20

100 • X = 16.000 • 20
100 • X = 320.000
X = 320.000 / 100 = 3.200

En un artículo que vale $16.000 nos darán un descuento de $3.200

Meta de comprension (2)

a. Si en un almacén de cadena ofrecen un descuento del 15% en artículos para el hogar, ¿cuál será el descuento en un artículo que vale $50.000?

b. En el salón de Pablo hay 40 estudiantes. Si el 25% son niñas, ¿cuántas niñas hay? ¿Qué porcentaje de niños hay?

c. En un almacén de cosméticos se exhiben cajas de labiales en dos presentaciones. Una presentación de siete labiales por un costo de 6.650 pesos y otra presentación de nueve labiales por un costo de 8.100 pesos. ¿Cuál de las presentaciones es más económica?

Dos analgésicos “Ibuprofeno” y “Dolex” han sido experimentados en dos muestras de personas de edades y situaciones clínicas similares, como remedio para el dolor de cabeza y se han obtenido los siguientes resultados:

Analgésico	N.° de personas que mejoran	N.° de personas que no mejoran
Ibuprofeno	40	60
Dolex	90	210

d. ¿Según los resultados cuál analgésico es más efectivo?

e. En la tienda del colegio se ofrecen distintas clases de alimentos.

En la siguiente tabla se presenta el contenido calórico y el peso en gramos por alimento.

Alimentos	Calorías	Gramos
Buñuelo	450	30
Empanada	600	40
Palito de queso	400	50
Pastel de arequipe	450	25

f. Si por motivos de salud su nutricionista le recomienda consumir a diario uno solo de estos alimentos por día y debe seleccionar aquel que contenga menos de 18 calorías por cada gramo de peso. ¿Cuáles alimentos cumplen con el requisito?

Se anuncia un concierto de Daddy Yanqui en el Coliseo Cayetano Cañizares. Las boletas se pueden adquirir en el supermercado Caratiendas o en el restaurante Doña Ceci y aunque el costo de una boleta en ambos sitios es igual, se hacen dos ofertas diferentes si la compra es superior a dos boletas. Coratiendas ofrece por el costo de tres boletas cuatro entradas para el concierto y por su parte Doña Ceci ofrece por el costo de cuatro boletas, cinco entradas al concierto.

g. Si en tu familia son 20 miembros y todos desean asistir. ¿Cuál es la oferta más económica? ¿Por qué?

h. Para ir al colegio Angie, Paula y Estefanía utilizan como medio de transporte la bicicleta. Angie vive a seis cuadras y tarda cinco minutos para llegar. Paula vive a 12 cuadras y tarda 11 minutos y Estefanía vive a 14 cuadras y tarda 12 minutos en llegar al colegio. ¿Cuál de las estudiantes realiza con mejor promedio de rapidez todo el recorrido? ¿Por qué?

i. Si debes repartir tres chocolatinas entre cuatro de tus compañeras y quieres hacerlo de forma equitativa. ¿Cuánto le corresponde a cada una de ellas? Realiza una representación gráfica de la situación.

VIII. Instrumento n.° 5

Hilo conductor

¿En qué situaciones debemos emplear la proporción? ¿Cuando pagamos el recibo del teléfono, nos están cobrando el IVA?

Tópicos generativos

- Identificar el IVA como un aumento sobre el total de un valor.
- Construir situaciones que reflejen el incremento de un valor por el cobro de un impuesto.
- Hallar el cobro del IVA en la factura telefónica.

Meta de comprensión

1. Observa la imagen del recibo del teléfono.

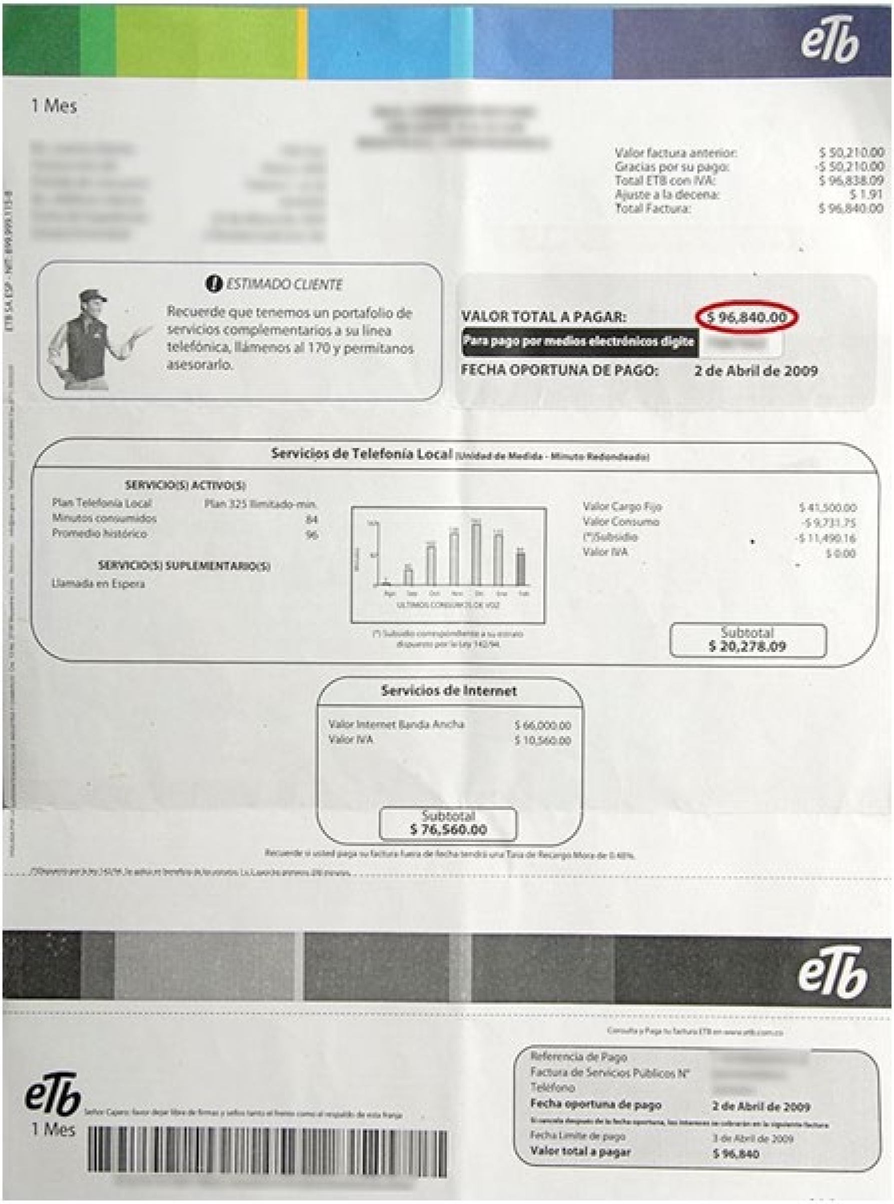
2. Observa el cuadro donde se muestran los últimos consumos de tu recibo del teléfono. ¿Cómo se calculan dichos valores para cada mes?

3. ¿En qué situaciones de tu vida se cobran impuestos, en particular el IVA?

4. Observa el cobro del IVA. ¿Cómo se calcula? ¿Explica cómo lo hiciste?

5. Según la tarifa de los impuestos. ¿Cuál es la diferencia entre el IVA y otros impuestos que se cobran en la factura?

6. Construye un ejemplo donde se cobre el IVA en una situación cotidiana. Explica por qué funciona tu razonamiento.



etb

1 Mes

Valor factura anterior:	$ 50,210.00
Gracias por su pago:	-$ 50,210.00
Total ETB con IVA:	$ 96,838.09
Ajuste a la decena:	$ 1.91
Total Factura:	$ 96,840.00

ESTIMADO CLIENTE

Recuerde que tenemos un portafolio de servicios complementarios a su línea telefónica, llámenos al 170 y permítanos asesorarlo.

VALOR TOTAL A PAGAR: $ 96,840.00

Para pago por medios electrónicos digite

FECHA OPORTUNA DE PAGO: 2 de Abril de 2009

Servicios de Telefonía Local (Unidad de Medida - Minuto Redondeado)

SERVICIO(S) ACTIVO(S)

Plan Telefonía Local	Plan 325 ilimitado-min.
Minutos consumidos	84
Promedio histórico	96

SERVICIO(S) SUPLEMENTARIO(S)

Llamada en Espera

ULTIMOS CONSUMOS DE VOZ

Valor Cargo Fijo	$ 41,500.00
Valor Consumo	-$ 9,731.75
(*)Subsidio	-$ 11,490.16
Valor IVA	$ 0.00

(*) Subsidio correspondiente a su estrato dispuesto por la Ley 142/94.

Subtotal $ 20,278.09

Servicios de Internet

Valor Internet Banda Ancha	$ 66,000.00
Valor IVA	$ 10,560.00

Subtotal $ 76,560.00

Recuerde si usted paga su factura fuera de fecha tendrá una Tasa de Recargo Mora de 0.48%.

etb

Consulte y Pague su factura ETB en www.etb.com.co

etb

1 Mes

Referencia de Pago	
Factura de Servicios Públicos N°	
Teléfono	
Fecha oportuna de pago	2 de Abril de 2009
Fecha Límite de pago	3 de Abril de 2009
Valor total a pagar	$ 96,840

IX. Instrumento n.° 6

Hilo conductor

El cambio es algo que siempre está presente en nuestro mundo. Cambia la luz en el transcurso de cada día; los seres vivos nos transformamos a medida que avanza nuestra vida, no solo en nuestra parte física, sino también en nuestras dimensiones espirituales e intelectuales, cambia el clima de manera natural y por el mal uso que hacemos de los recursos naturales. ¿Cómo se relaciona la proporción con los cambios que sufrimos a diario?

Tópico generativo

- Identifica la variable dependiente y la variable independiente en situaciones generadoras de cambio.

Meta de comprensión (1)

1. Identifica algunos cambios físicos que has tenido desde tu nacimiento hasta hoy, y explica en que ha consistido. Da ejemplos.

2. Lee el siguiente texto

Durante las cuarenta semanas que dura la gestación de un ser humano se producen muchos cambios, entre ellos el aumento de talla y peso. Revisemos los datos de la siguiente tabla tomada del libro *La gestación humana, una mirada integral*, publicado por el Instituto de Desarrollo Infantil de Cali:

Teniendo en cuenta que el feto en condiciones normales crece constantemente, se puede dar una medida aproximada en cada semana o si se quiere por días.

El óvulo fecundado mide apenas un centésimo de centímetro; tratemos de imaginar esta longitud que es diez veces más pequeña que un milímetro.

3. Responde las siguientes preguntas teniendo en cuenta la información de la tabla:

Semanas de gestación	Talla en cm.
Óvulo fecundado	0,01
5	1
10	6
15	12
20	20
25	33
30	38
35	40
40	50

- ¿Cuánto mide el feto en la quinta semana de gestación?, ¿y cuando han pasado 15 semanas?, ¿cuál es el periodo durante el cual crece más?, ¿todos los niños miden 50 cm. en el momento del nacimiento?, ¿Qué factores influyen para que se presenten diferencias en la talla del nacimiento?

4. ¿Podemos encontrar la talla aproximada del feto a las 2 semanas y media? ¿De qué forma?

5. Si el feto tiene 26 semanas de gestación, ¿cuál será su talla?

6. Realiza una gráfica donde representes las medidas de la tabla incluyendo las preguntas anteriores.

7. Entre más semanas pasan, ¿qué sucede con la talla del feto?

8. ¿Puedes decir qué medida depende de la otra? ¿Por qué?

Meta de comprensión (2)

Se realizará una fiesta de fin de año y para ello cada estudiante debe recolectar 60.000 pesos. Como condición el aporte de cada día será el mismo hasta lograr reunir todo el dinero. Completa la siguiente tabla donde se relaciona el valor del aporte diario y el número de días necesario para que cada estudiante logre reunir todo el dinero.

Aporte diario en pesos	1.000		3.000	2.400	
Número de días		30	20		15

a. ¿Cómo obtuvieron los valores faltantes en la tabla?

b. ¿Si el aporte es de 5.000 pesos diarios cuál será el número de días necesarios para reunir todo el dinero?

2. Para una salida de excursión a Santafé de Antioquia se contrataron cinco buses que deben recorrer 90 kilómetros. Todos llevan una velocidad promedio diferente.

Bus	N.° 1	N.° 2	N.° 3	N.° 4	N.° 5
Velocidad promedio (Km/h)	90	45	30		20
Tiempo (horas)	1	2		5	

a. ¿Cómo obtuvieron los valores faltantes en la tabla?

b. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

c. Debido a la cantidad de viajeros, se contrató un sexto bus y su velocidad promedio fue 60 kilómetro por hora, ¿cuál fue el tiempo que tardo en realizar el recorrido?

Editado por el Instituto Latinoamericano de Altos Estudios –ILAE–,
en julio de 2014

Se compuso en caracteres Cambria de 12 y 9 ptos.

Bogotá, Colombia