El teorema fundamental del cálculo en el contexto de la teoría de registros de representación semiótica con estudiantes de ingeniería

KATIA VIGO INGAR

ilae
Instituto Latinoamericano de Altos Estudios

El teorema fundamental del cálculo en el contexto de la teoría de registros de representación semiótica con estudiantes de ingeniería

El teorema fundamental del cálculo en el contexto de la teoría de registros de representación semiótica con estudiantes de ingeniería

Katia Vigo Ingar

Instituto Latinoamericano de Altos Estudios –ILAE–

Publicación sometida a evaluación de pares académicos (*Peer Review Double Blinded*).

ISBN 978-958-5535-91-6

Cra. 18 # 39A-46, Teusquillo, Bogotá, Colombia
PBX: (571) 232-3705, FAX (571) 323 2181
www.ilae.edu.co

Diseño de carátula y composición: Harold Rodríguez Alba
Edición electrónica: Editorial Milla Ltda. (571) 702 1144
editorialmilla@telmex.net.co

Editado en Colombia
Published in Colombia

De manera especial a Brian Joel Valenzuela Pagaza, pues él fue el principal cimiento
para la ejecución y desarrollo de este trabajo de investigación.

A Dios pues me ha ofrecido la capacidad para superarme
y crecer como persona y como profesional.

Contenido

Índice de tablas

ÍNDICE DE FIGURAS

Introducción

El interés por analizar procesos, como la coordinación de representaciones en diferentes registros que realizan estudiantes de ingeniería, en particular Ingeniería de Alimentos, surgió a raíz de observar las dificultades que presentan los estudiantes del curso Cálculo integral o Matemáticas II, al querer lograr el entendimiento y la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo –TFC–; así como la aplicación del mismo. Por tal motivo, se considera que los aspectos teóricos y metodológicos de la didáctica de las matemáticas brindan todas las herramientas necesarias para realizar cualquier estudio investigativo.

El principal objetivo de esta investigación es analizar la coordinación de las representaciones en los registros de representación semiótica: gráfico-algebraico-lengua natural, que los estudiantes de Ingeniería de Alimentos realizan cuando desarrollan una situación problema relacionada al TFC. Para alcanzar dicho objetivo, se analiza el desarrollo de las conversiones y tratamientos de las representaciones de los objetos presentes en el enunciado de dicho teorema, y se establece un marco teórico que permite realizar los procesos mencionados, conversiones y tratamientos.

El marco teórico de la Teoría de Registros de Representación Semiótica –TRRS– de Duval[1], proporciona herramientas valiosas y necesarias para comprender e interpretar las transformaciones realizadas por los sujetos de investigación cuando desarrollan una situación problema relacionada al TFC. Así mismo, se escoge como referencia algunos aspectos metodológicos de la Ingeniería Didáctica –ID– de Artigue *et al.*[2].

---

1 Raymond Duval. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, Cali, Colombia, Universidad del Valle, 1999.

2 Michèle Artigue, Luis Moreno Fernández y Régine Douady. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, disponible en [http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf].

Por último, para analizar los resultados obtenidos de la situación problema, se confronta el análisis *a priori* con el análisis *a posteriori*, característica de la ID, para observar si los resultados fueron o no los previstos por el investigador. Este modo de realizar el análisis permitió que el uso del GeoGebra favoreciera la conversión de representaciones en el registro algebraico al gráfico, además, de facilitar los tratamientos en el registro gráfico. Así mismo, la TRRS determina la explicación del desarrollo de las conversiones y tratamientos, además de identificar las dificultades por las cuales los estudiantes no realizan la coordinación.

Capítulo primero
Ingeniería didáctica:
procesos de enseñanza-aprendizaje

Considerando que este trabajo es una investigación cualitativa en educación matemática, se hace indispensable reflexionar en un método que guíe de modo sistemático para alcanzar los objetivos de la investigación, es por ello que se consideran algunos aspectos de la ingeniería didáctica de Michèle Artigue.

La ingeniería didáctica se caracteriza principalmente por ser una metodología de carácter experimental, la cual está basada en las intervenciones didácticas en clase, que toman la forma de una secuencia de lecciones de enseñanza[3]. Es decir, trata del diseño y evaluación de secuencias de enseñanza de las matemáticas teóricamente fundamentadas, con la intención de hacer emerger determinados fenómenos didácticos, al tiempo que se logra elaborar recursos para la enseñanza experimentados en el ámbito científico.

Según la autora, la metodología mencionada lleva ese nombre debido a que describe el modo de abordar el trabajo de profesor con el trabajo que realiza un ingeniero. Por ejemplo, cuando un ingeniero va a llevar a cabo un proyecto, éste se apoya en los conocimientos científicos de su dominio, accede a someterse a controles científicos, pero a la vez está obligado a encargarse de objetos mucho más complicados que los de la ciencia, y por tanto puede abordar problemas que la ciencia no puede o no ha tomado aún a su cargo[4].

---

3 Artigue, Moreno Fernández y Douady. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, cit.

4 Michèle Artigue. “Ingenierie didactique”, en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, n.° 3, 1989, pp. 281 a 308, disponible en [https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/].

Según BROUSSEAU[5] la ingeniería didáctica se ocupa de la creación de modelos coherentes y pertinentes, de permitir dispositivos educativos sobre el conocimiento preciso, la intención de describir o predecir y explicar los acontecimientos observables de un episodio de enseñanza específica observado o propuesto. El estudio de la coherencia y pertinencia de estos modelos se refiere a una revisión crítica de los conceptos relacionados con la enseñanza, el aprendizaje y la constitución de la materia que se enseña.

Según ARTIGUE[6] la ingeniería didáctica como metodología de investigación se caracteriza por:

- Estar basada en las intervenciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

- La validación que se realiza es en esencia interna, fundada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori* (y no la validación externa, basada en la comparación de rendimientos de grupos experimentales y de control).

Con respecto a esta característica de la ingeniería, ARTIGUE afirma que:

> Las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*[7].

5 GUY BROUSSEAU. *Introduction à l'Ingénierie Didactique*, 2016, disponible en [http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-ling%C3%A9nierie-didactique3.pdf].

6 ARTIGUE, MORENO FERNÁNDEZ y DOUADY. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, cit.

7 Ibíd., p. 37.

I. Fases de la ingeniería didáctica

A. Análisis preliminar

En esta fase, se debe explorar el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza de un determinado objeto matemático, por ejemplo, se debe analizar la enseñanza tradicional, las concepciones que tienen los estudiantes en relación con el objeto matemático en estudio, así como las dificultades y obstáculos que se presentan en la compresión del mismo, además de analizar las restricciones donde se realizará el estudio. En esta investigación, esto se encuentra desarrollado en los antecedentes y en la justificación (malla curricular, sílabos), los cuales guardan relación con el estudio del Teorema Fundamental del Cálculo –TFC–. Los aspectos del TFC son los siguientes:

– *Aspecto epistemológico*

Según Artigue, este aspecto "está asociado a las características del saber en juego"[8]. Desde esta perspectiva, este aspecto se compone por las cuestiones históricas y matemáticas del TFC, es decir, cómo emerge el TFC en la historia hasta que se formaliza como objeto matemático de estudio; así como se tomó como base los trabajos de Boyer[9], Grande[10] y Campos[11].

8 Artigue, Moreno Fernández y Douady. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, cit., p. 40.

9 Carl B. Boyer. *Historia de la matemática*, España, Alianza Editorial, 1987.

10 André Lúcio Grande. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino" (tesis doctoral), São Paulo, Brasil, Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2013, disponible en [https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/10979].

11 Ronaldo Pereira Campos. "A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica" (tesis de maestría), São Paulo, Brasil, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007, disponible en [https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11269].

– *Aspecto cognitivo*

Para Artigue, este aspecto "está asociado a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza"[12]. Desde esta perspectiva, este aspecto se desarrolla con el levantamiento de antecedentes, investigaciones de referencia, los cuales tienen relación directa o indirecta con el estudio, enseñanza y aprendizaje del TFC y con las características de los sujetos implicados, por ejemplo, nivel similar de instrucción, formación matemática similar.

– *Aspecto didáctico*

Según Artigue[13], este aspecto "está asociado con las características del funcionamiento del sistema de enseñanza". Desde esta perspectiva, este aspecto será tratado al analizar el libro de texto *Cálculo de una variable: trascendente tempranas* cuyo autor es James Stewart, el cual se encuentra como libro de consulta en el sílabo del curso de Matemática II impartido por la Facultad de Ingeniería de Alimentos de la Universidad Nacional del Callao –UNAC–; permitiendo así conocer la manera en que el conocimiento, el estudio del TFC, se transmite a los estudiantes.

B. Concepción y análisis a priori

Con respecto a la concepción, en esta etapa se toman en cuenta las restricciones cognitivas de los estudiantes, es decir, sus errores más frecuentes y las dificultades que tienen cuando abordan el TFC, así como el estudio del objeto matemático, lo cual fundamenta el análisis preliminar y permitirá iniciar el proceso de ingeniería para lograr la génesis esperada. Esto lo defiende Artigue: "la fase de concepción se basa no sólo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos di-

---

12 Artigue, Moreno Fernández y Douady. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, cit., p. 40.

13 Artigue, Moreno Fernández y Douady. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, cit.

dácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares”[14].

Con respecto al diseño de la situación problema, este debe contener tales supuestos, además, debe guardar relación directa con los objetivos de la investigación. Las actividades que conforman la situación problema deben estar diseñadas con la finalidad de permitir la génesis artificial del conocimiento, en este caso, la génesis del TFC, para ello el profesor ingeniero manipula las variables de comando, las cuales permitirán esta génesis.

Por otro lado, en relación con las variables de comando, ARTIGUE distingue las variables macro-didácticas o globales y las variables micro-didácticas o locales.

a) *Variables macro-didácticas*: aquellas “concernientes a la organización global de la ingeniería”[15]

b) *Variables micro-didácticas*: aquellas “concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase”[16].

Por consiguiente, se quiere establecer que el estudiante pueda aprender un conocimiento matemático a partir de una situación problema diseñada por el profesor-investigador, para lo cual se controlan y modifican ciertas condiciones (variables didácticas) que tienen la finalidad de adquirir dicho conocimiento. En este sentido, BROUSSEAU señala que “las variantes de una situación relativa a un mismo saber matemático pueden presentar grandes diferencias de complejidad y en consecuencia conducir a estrategias óptimas diferentes y también maneras diferentes de conocer un mismo saber”[17].

---

14 ARTIGUE, MORENO FERNÁNDEZ y DOUADY. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, cit., p. 38.

15 Ibíd., p. 42.

16 Ídem.

17 GUY BROUSSEAU. *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*, Buenos Aires, Argentina, Libros de Zorzal, 2007, p. 41.

Además, Almouloud[18] afirma que la elección de las variables didácticas y sus valores logran modificar estrategias óptimas, y si estos cambios son significativos, generan un cambio informacional lo cual puede llevar a un cambio de estrategia para resolver el problema en cuestión. Las variables son elegidas para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, por esta razón serán importantes en la elaboración de las actividades que conforman la situación problema que vamos a diseñar.

Por lo anterior, el análisis *a priori* tiene como objetivo analizar de forma previa si las modificaciones realizadas en las variables didácticas permitieron controlar las acciones de los estudiantes y darles sentido. Según Artigue, el objetivo del análisis *a priori* es:

> Determinar que las selecciones hechas permitan controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*[19].

De esta manera, el análisis *a priori* por lo general comprende una parte descriptiva y una predictiva, pues describe las selecciones del nivel local (vinculándolas con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden; analiza qué puede estar en juego en una situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor; prevé los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje. Se determina que, en este análisis, el estudiante es considerado en los niveles descriptivo y predictivo, por ello es el actor principal; en cambio, el profesor está poco presente y sólo interviene en el nivel descriptivo o al realizar una devolución.

---

18 Saddo Ag Almouloud. *Fundamentos da educação matemática*, Panamá, Universidad Federal de Panamá, 2007.

19 Artigue, Moreno Fernández y Douady. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, cit., p. 45.

C. Experimentación

Esta etapa se realiza en la ingeniería con sujetos de investigación, ésta inicia en el momento en que se da el contacto entre el investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes que son objeto de investigación. En este sentido, se plantea que en esta etapa se ejecutan los diseños y se recoge información, los datos cualitativos, que comunican los fenómenos identificados en el análisis *a priori*.

La experimentación considera los siguientes puntos:

a) Explicar los objetivos y las condiciones de realización de la investigación, por ejemplo: se muestran las herramientas que emplearán para recoger los datos, a los estudiantes que participarán en la investigación, con la finalidad de que no interrumpan el desarrollo de la génesis del conocimiento. Es decir, establecer el contrato didáctico.

b) La aplicación de los instrumentos de investigación que abarcan las actividades diseñadas para ser trabajadas en las sesiones pactadas con los sujetos de investigación, empleando el software de geometría dinámica GeoGebra, además de trabajar a lápiz y papel, con apoyo de un marco teórico y de objetivos generales y específicos.

C) El registro de observaciones realizadas durante la experimentación. Es recomendable, cuando la experimentación tarda más de una sesión, se debe hacer un análisis *a posteriori* local, confrontando con los análisis *a priori*.

D. Análisis a posteriori y validación

El objetivo de realizar el análisis *a posteriori* es realizar conclusiones en función de las relaciones que se presentan entre los objetivos, establecidos *a priori*, con las observaciones realizadas y el producto obtenido en la fase de la experimentación con la intención de evaluar la reproducibilidad y la regularidad de los eventos observados. Para Artigue:

> Esta fase se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se complementan con frecuencia con otros [...] como cuestionarios, en-

> trevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso...[20].

De esta manera, las acciones realizadas y los resultados obtenidos por los estudiantes luego de la experimentación, serán recogidos de manera física (los procedimientos y respuestas de los estudiantes), en forma de grabaciones de audio y video, también se pueden utilizar diversos *softwares* que permitan capturar las acciones que realizan los estudiantes en una computadora al resolver las actividades planteadas por el profesor investigador.

La validación de cualquier hipótesis propuesta en una investigación, se da cuando se realiza la confrontación o comparación entre el producto realizado por los estudiantes y lo que se espera que ellos, respondan al desarrollar las actividades que conforman la situación problema planteada. Esto corresponde a lo que denomina la autora como validación interna.

II. Representación semiótica

Los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemática constituyen un reto para los docentes, en el sentido que éstos deben buscar estrategias para trasmitir el contenido matemático y, sobre todo, lograr que el estudiante lo interiorice. Para la comunidad de educación matemática, según Duval[21], estos procesos involucran actividades cognitivas como la conceptualización, la reflexión, el planteamiento y la resolución de problemas.

Debido a esto, Duval[22] afirma que los investigadores en educación matemática han desarrollado diversos enfoques, los cuales se caracterizan por utilizar representaciones, pues en matemáticas los objetos son

20 Artigue, Moreno Fernández y Douady. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, cit., p. 48.

21 Duval. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, cit.

22 Raymond Duval. “Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática”, en Silvia Dias Alcântara Machado (org). *Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica*, Campinas, Editora Papiros, 2013.

abstractos, a diferencia de otras ciencias donde los objetos son tangibles; entre los enfoques destacados están los didácticos y los epistemológicos.

Así mismo, para el autor las representaciones constituyen una herramienta importante en el aprendizaje de las matemáticas, pues permiten acceder a los objetos matemáticos, por ejemplo, una representación del objeto integral indefinida de una función real de variable real es $\int f(x)\, dx$. Las representaciones pueden ser internas y externas; las primeras son las que poseen un sujeto y se caracterizan porque no son comunicadas, en cambio las externas son generadas por la aplicación de un sistema semiótico y son entendibles por todos aquellos que entienden el sistema semiótico considerado.

En este sentido, el autor afirma que las representaciones "también pueden ser signos y sus asociaciones complejas, que se producen de acuerdo con reglas que permiten la descripción de un sistema, un proceso, un conjunto de fenómenos que pueden ser mentales, computacionales y semióticos"[23]. Esto quiere decir que las representaciones semióticas son representaciones externas y no sólo se utilizan para comunicar algo, sino también para el desarrollo de la actividad matemática, es decir, que ellas son herramientas que generan un nuevo conocimiento.

Además, las representaciones semióticas son el único medio de acceso a los objetos matemáticos, por consiguiente, se deben emplear distintas representaciones para estudiarlas, y para ello es importante reconocer que éstas no son el objeto matemático, sino que ayudan a su comprensión, lo cual hace que, pasar de la representación de un objeto a otra representación del mismo, sea un problema. De esta manera, las representaciones semióticas quedan determinadas por un sistema particular de signos, lenguajes, expresiones algebraicas, gráficos cartesianos; lo que permite su transformación en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico para el sujeto que las moviliza.

Duval, citado por Vigo Ingar, plantea que un sistema semiótico:

> Considera reglas, más o menos explícitas, que permiten combinar los signos entre sí, de modo que la asociación formada tenga también un sentido. Las posibilidades de combinación son las que dan la capacidad inventiva al sistema

23 Duval. "Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática", cit., p. 62.

semiótico permitiendo efectuar, en su interior, transformaciones de expresión o de representación. Estas reglas determinan el funcionamiento del sistema, su sintaxis en sentido amplio...[24].

En este apartado, se utilizarán diversos sistemas semióticos los cuales presentan reglas que permiten la escritura y la interpretación de símbolos, expresiones de una manera determinada, por ejemplo la escritura algebraica es la representación de la derivada de la función *f*. Un sistema semiótico es un registro de representación semiótica siempre que permita realizar tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis, entendida ésta como la aprehensión o producción de una representación semiótica.

A. Registro de representación semiótica

Duval[25] afirma que un registro de representación semiótica es un sistema semiótico que permite desarrollar tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis que son: la formación, el tratamiento y la conversión.

- *Formación*

La formación de una representación semiótica en un determinado registro "implica siempre una selección en el conjunto de caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se quiere representar"[26]. Esto quiere decir que realizar la formación de una representación semiótica consiste en el empleo de reglas de cumplimiento y de selección de ciertas características y propiedades de lo que se quiere representar. Esas reglas ya están establecidas por la comunidad científica, en este caso la matemática, de modo que al usarlas se puedan reconocer tales representaciones.

---

24 Raymond Duval cit. en Katia Vigo Ingar. "A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais" (tesis doctoral), São Paulo, Brasil, Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2014, disponible en [https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11013], p. 42.

25 Duval. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, cit.

26 Ibíd., p. 43.

No obstante, es de suma importancia respetar las reglas de formación, no sólo por razones de comunicación, sino también porque permitirán el uso de los medios de tratamiento que brinda el sistema semiótico empleado. Por ejemplo, la formación de la representación de la familia de antiderivadas de una función real de variable real en el registro algebraico es dada por $\int f(x)\,dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$, pues en su formación se identifican variables x, $F(x)$, el integrando $f(x)$, la escritura algebraica $\int .\, dx$, la pertenencia, el signo de adición, el símbolo de los números reales y las integrales indefinidas.

Así como también es imperativo acotar que los *softwares* computacionales como Mathematica y GeoGebra, contribuyen a la producción de representaciones semióticas. Para llevar a cabo estas representaciones, los usuarios deben conocer los comandos necesarios del *software* empleado, así como los conceptos matemáticos movilizados a representar[27].

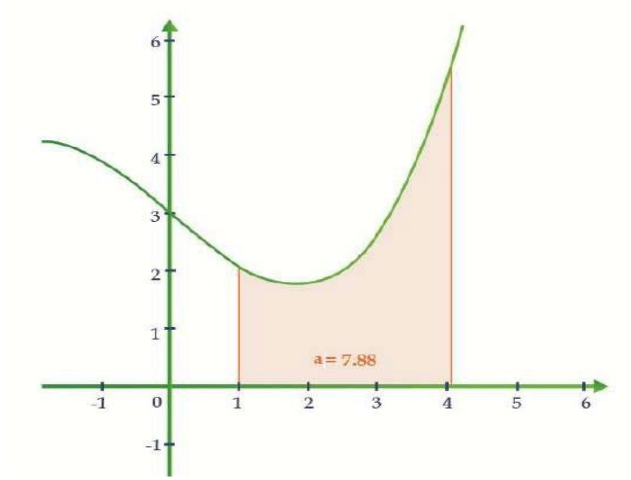
Por consiguiente, para realizar la formación de una representación gráfica del objeto matemático integral definida mediante GeoGebra se tomó como base el trabajo de Vigo Ingar[28] en el cual esta formación se da por medio de los comandos del *software* GeoGebra y se envían órdenes a su núcleo para mostrar las representaciones en pantalla, para ser más exactos en la vista gráfica del *software*. Por ejemplo, para formar la representación gráfica de la función acumulación evaluada en cuatro, $F(4) = f(x)\,dx$, previa definición de la función $f(x) = 0{,}1x^3 - x + 3$, se debe ingresar en la entrada, el comando *Integral (f, 1, 4)*, para después presionar la tecla *enter*, obteniendo así la representación gráfica mostrada en la Figura 1.

---

27 Raymond Duval cit. en Vigo Ingar. "A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais", cit.

28 Vigo Ingar. "A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais", cit.

Figura 1
Representación gráfica de la integral definida empleando GeoGebra



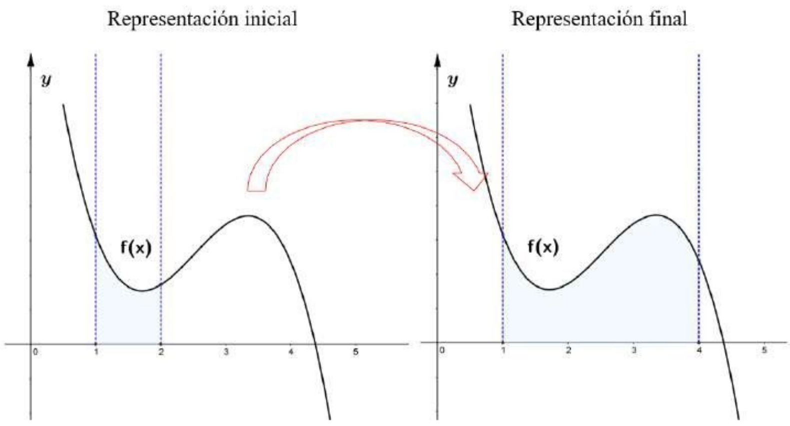
Además, el *software* permite facilitar y acelerar los cálculos, lo que quiere decir, que para obtener el valor de la integral $F\ (4) = \int (x)\ dx$ se empleará el comando *Integral*.

- *Tratamiento*

Es la transformación de una representación en el mismo registro en el cual se formó, en otras palabras, el tratamiento de una representación es una transformación interna en el mismo registro. Así, en el registro de lengua natural un ejemplo de tratamiento es el parafraseo; en cambio, en el registro algebraico los tratamientos son las posibles operaciones que se pueden realizar a una determinada representación, por ejemplo, un tratamiento en el registro algebraico es, $d/dx \int_a^x f\ (t)\ dt = f\ (x)$.

Del mismo modo, un ejemplo de tratamiento en el registro gráfico es la traslación de la representación gráfica de la recta vertical $x = 2$ a $x = 4$ lo cual ocurre cuando la función $F\ (x) = \int_1^x f\ (t)\ dt$ es evaluada en $x = 2$ y $x = 4$ conforme se muestra en la Figura 2.

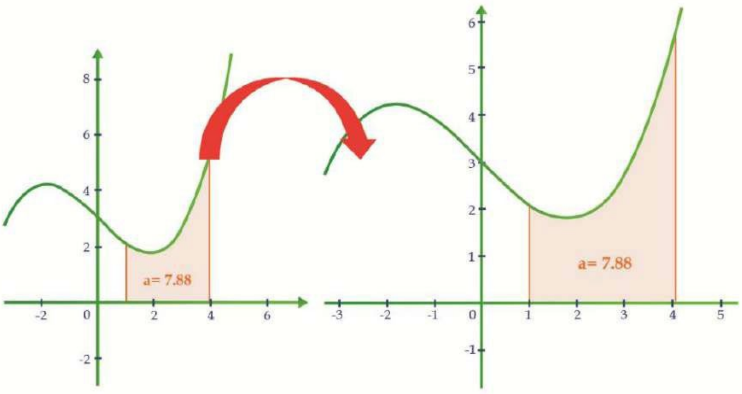
Figura 2
Tratamiento de la representación del proceso de acumulación en el registro gráfico



Según Duval, citado por Vigo Ingar[29], la computadora desempeña un papel importante en la realización de tratamientos debido a que muestra las representaciones que son resultado de efectuar procedimientos de manera rápida. Esto quiere decir, por ejemplo, que realizar gráficos y cálculos que pueden tomar horas y días, son realizados por el software de manera inmediata. Además, el empleo del software permite que los sujetos manipulen las representaciones, por ejemplo, realizar un acercamiento o *zoom* a una representación gráfica equivale a realizar un tratamiento en el registro grafico tal como se muestra en la Figura 3.

29 Raymond Duval cit. en Vigo Ingar. "A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais", cit.

Figura 3
Tratamiento realizado en el registro gráfico por medio del GeoGebra



Es importante aclarar que dicho tratamiento se puede realizar con el uso del mouse o con el comando  (aproximar) del GeoGebra.

DUVAL[30] afirma que escoger un registro de representación adecuado para representar un determinado objeto puede favorecer el tratamiento. Por ejemplo, para llevar a cabo el proceso de acumulación $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, es recomendable representar la función en el registro gráfico empleando GeoGebra.

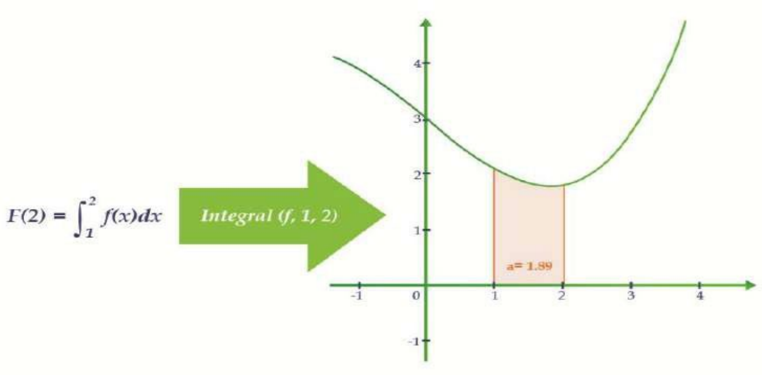
- *Conversión*

Es la transformación de una representación de un registro en una representación en otro registro, conservando la totalidad o una parte del objeto matemático en cuestión. En otras palabras, la conversión es una transformación externa al registro de representación inicial. Por ejemplo, la traducción de un texto en una o más expresiones algebraicas corresponde a una conversión de representaciones de estas expresiones de la lengua natural hacia el registro algebraico, por lo que se puede notar que la conversión es una actividad independiente y diferente al tratamiento.

30 DUVAL. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, cit.

Para explicar cómo se da la conversión de las representaciones usando GeoGebra, se tomará como base el trabajo de Vigo Ingar[31] en el cual la investigadora señala que una conversión de la representación en el registro algebraico hacia una representación en el registro gráfico CAS, se obtiene cuando se emplean los comandos propios del *software*. A continuación, en la Figura 4 se presenta un ejemplo de esta transformación.

Figura 4
Conversión de la representación de la función acumulación del registro algebraico hacia el registro gráfico CAS



En la Figura 4, se visualiza la conversión de la representación de la función acumulación evaluada en dos, por medio del GeoGebra del registro algebraico hacia el registro gráfico CAS. Esta transformación se da cuando la representación de la integral definida en el registro algebraico va hacia el registro gráfico CAS, empleando el comando *Integral (f, 1, 2)* del GeoGebra; previa definición de la función $f(x) = 0{,}1x^3 - x + 3$.

Se debe tener en cuenta que cuando se representa la integral definida de la función f en el intervalo [1, 2] en dos representaciones diferentes, la algebraica y la gráfica, propia del GeoGebra, se movilizan actividades cognitivas, como por ejemplo, el establecimiento de relaciones entre los conocimientos matemáticos y los comandos del GeoGebra.

31 Vigo Ingar. "A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais", cit.

Duval[32] afirma que disponer de varios registros de representación no es suficiente para garantizar la comprensión, por lo que se necesita de una segunda condición, la cual consiste en la capacidad que tiene un sujeto para reconocer una representación de un objeto en dos o más registros diferentes; a esta capacidad se le denomina coordinación de representaciones. De esta manera, la coordinación es la única posibilidad de la que se dispone para no confundir el objeto matemático con su representación, por lo que el autor plantea que para analizar las dificultades en matemáticas, es necesario estudiar las conversiones de representaciones y no los tratamientos, debido a que la capacidad de convertir representaciones implica la coordinación de las mismas.

La originalidad de la actividad matemática está en la movilización simultánea de al menos dos registros de representación al mismo tiempo o en la posibilidad de intercambiar en todo momento de registro de representación[33]. Además, el autor señala que la conversión no tiene ningún papel esencial en los procesos matemáticos de demostración o prueba, debido a que se realizan en base a tratamientos efectuados en un determinado registro discursivo; lo que servirá para analizar las transformaciones que se establecen en el libro *Curso de Análise vol.1* de Elon Lages Lima[34].

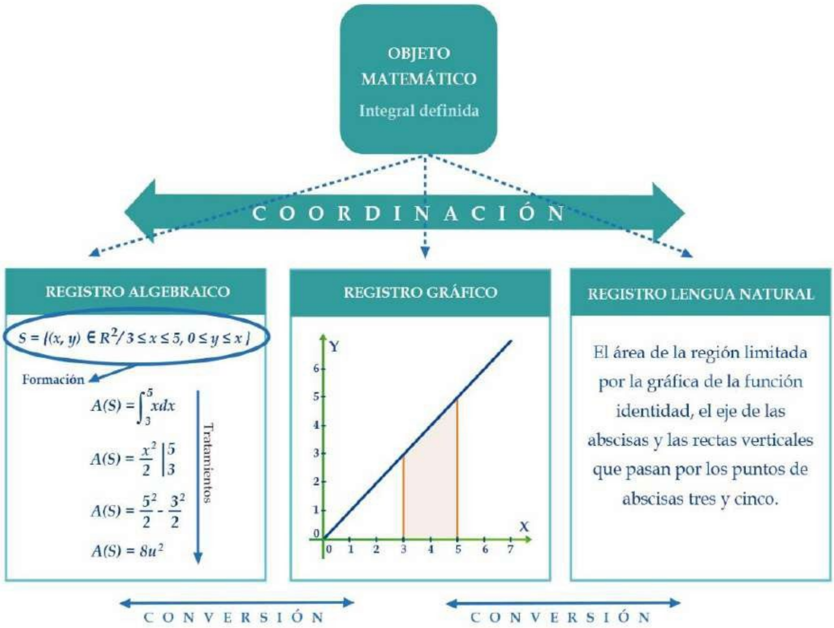
Por otro lado, en la Figura 5 se presenta la coordinación de la representación del objeto matemático integral definida en los registros de representación lengua natural, algebraica, gráfica. También, se evidencia la formación de la representación del área en el registro algebraico, es decir, se muestran los símbolos de pertenencia ∈, los pares ordenados (,), las variables *y* y *x*, etc.; así como los tratamientos que se realizan en el registro algebraico y numérico.

32 Duval. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, cit.

33 Raymond Duval. *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo: Curso del Doctorado en Educación con énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle, 1999*, Cali, Colombia, Universidad del Valle, 2004.

34 Elon Lages Lima. *Análisis Real. Volumen 1*, Santiago de Chile, Instituto de Matemática y Ciencias Afines, 1997, disponible en [https://www.u-cursos.cl/usuario/04ca1aaa5a84ce549ea753721d6895f0/mi_blog/r/An_lisis_Real._Lima.pdf].

Figura 5
Tratamiento, conversión y coordinación
de la representación del objeto matemático integral definida



En este estudio, se utilizaron los registros de representación semiótica: registro verbal o de lengua natural, registro gráfico (lápiz y papel), registro gráfico CAS (por medio del GeoGebra), registro algebraico y registro numérico; los cuales son movilizados en la actividad matemática y pueden ser agrupados tal como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1
Registros movilizados en la actividad matemática

	Representación discursiva	Representación no discursiva
Los tratamientos no son algorítmizables	• Registro de lengua natural.	• Registro figural.
Los tratamientos son algorítmizables	• Registro algebraico. • Registro numérico.	• Registro gráfico. • Registro gráfico CAS.

Las investigaciones de GRANDE[35], ANACLETO[36] y PICONE[37] demuestran que los estudiantes logran una comprensión incompleta del significado del TFC, esto se debe a que sólo realizan tratamientos en el registro algebraico y a lo mucho conversiones de representaciones de un determinado objeto matemático, involucrado con el TFC, del registro algebraico al registro de lengua natural. Por tal motivo se han realizado investigaciones que buscan mejorar la compresión del TFC, como las de SCUCUGLIA[38] o ROBLES *et al.*[39], sugiriendo actividades mediante el uso de un software, en este caso GeoGebra, que permita al estudiante coordinar representaciones de un determinado objeto en el registro gráfico con los registros mencionados con anterioridad, es por ello que se cree que además del trabajo tradicional a lápiz y papel, se deben realizar actividades que permitan al estudiante hacer tratamientos en el registro gráfico.

---

35 GRANDE. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", cit.

36 GRÁCIA MARIA CATELLI ANACLETO. "Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo" (tesis de maestría), São Paulo, Brasil, Pontificia Universidad Católica de São Paulo, 2007.

37 DESIREE FRASSON BALIELO PICONE. "Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo" (tesis de maestría), São Paulo, Brasil, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007, disponible en [https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11275].

38 RICARDO SCUCUGLIA. "A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas" (tesis de maestría), Río Claro, Brasil, Universidade Estadual Paulista, 2006, disponible en [http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissertacoes/scucuglia_r_me_rcla.pdf].

39 MARTHA GABRIELA ROBLES ARREDONDO, EDUARDO TELLECHEA ARMENTA y VICENÇ FONT MOLL. "Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo", en *Educación Matemática*, vol. 26, n.° 2, 2014, pp. 69 a 109, disponible en [https://www.redalyc.org/pdf/405/40532665004.pdf].

Capítulo segundo
Antecedentes teóricos
del teorema fundamental del cálculo

En este capítulo, se presentarán los trabajos realizados por diversos investigadores cuyo objeto matemático de estudio es el Teorema Fundamental del Cálculo –TFC–, permitiendo un panorama global de las propuestas de estos estudios en relación a este teorema, así como de las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de elemento matemático, además de observar las conclusiones y las soluciones presentadas por los investigadores ante estas situaciones.

En la investigación realizada por Grande[40], el autor afirma que emplear la noción de acumulación al abordar el concepto de integral, interpretar la derivada como variación o razón de cambio, la continuidad de una función, la noción de función y su representación gráfica, son fundamentales en la enseñanza y aprendizaje del TFC. La noción de acumulación permitirá interpretar y manipular la siguiente expresión $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, no sólo como el área bajo la curva sino en otras situaciones, lo cual permite diseñar situaciones contextualizadas, las cuales se basan en obtener una función a partir de su variación, por ejemplo, hallar la función que modela el espacio recorrido de un móvil a partir de su velocidad, y con ello lograr relacionar el registro gráfico con el algebraico, permitiendo abordar dicho tema de modo diferente y con ello dejar la tradicional interpretación de la integral, el área bajo la curva.

40 Grande. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", cit.

Así mismo, la noción de razón de cambio permitirá interpretar gráficos de variación de una función con respecto a determinada cantidad, tasas de variación de una función y con ello poder obtener el gráfico de la función mencionada, luego, la noción de función permitirá a los estudiantes manipular y entender la expresión $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, por último, la noción de continuidad permitirá a los estudiantes analizar las condiciones necesarias que debe tener la función *integrando* para poder aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo.

Por otro lado, la investigación realizada utiliza los fundamentos teóricos planteados por Poincaré[41] sobre el uso de la intuición en la construcción del pensamiento matemático, además, de los conceptos y características del razonamiento intuitivo en la ciencia y las matemáticas descritas por el psicólogo Fischbein[42]. Para analizar los resultados obtenidos en las actividades realizadas, Grande[43] empleó como marco teórico la visualización en la educación de cálculo y las interrelaciones con la intuición y rigor, planteados por Tall[44]. Con respecto a la metodología, es cualitativa, y está basada en los fundamentos planteados por Creswell[45], quien afirma que una investigación cualitativa puede interpretarse como una herramienta para explorar y comprender los significados que tiene una persona o un grupo de personas sobre un problema de naturaleza humana o social.

El estudio realizado por Grande[46] tiene como objetivo hacer un estudio didáctico epistemológico del Teorema Fundamental del Cálculo –tfc–, mostrando una actividad desarrollada en clase que permita emerger la relación entre las operaciones de integración y de derivación, además, bajo qué condiciones se establece esta relación, lo cual

41 Henri Poincaré. *El valor de la ciencia*, España, krk Ediciones, 2008.

42 Efraim Fischbein. "Intuitions and schemata in mathematical reasoning", en *Educational Studies in Mathematics*, vol. 38, 1999, pp. 11 a 50, disponible en [https://link.springer.com/article/10.1023/A:1003488222875].

43 Grande. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", cit.

44 David Tall. "The psychology of advanced mathematical thinking", en *Advanced Mathematical Thinking*, Boston, Kluwer Academic Publishers, 2002, disponible en [https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F0-306-47203-1_1].

45 John W. Creswell. "Mapping the developing landscape of mixed methods research", en Abbas Tashakkori y Charles Teddlie (eds.). *Sage handbook of mixed methods in social & behavioral research*, Los Angeles, California, sage Publicaciones 2010.

46 Grande. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", cit.

es la esencia del teorema. Para ello, se realizó un cuestionario piloto con 14 estudiantes, de la Facultad Pública de Tecnología en el estado de São Paulo, en el cual analiza los conocimientos que poseen los estudiantes al abordar tópicos como acumulación, funciones, razón de cambio, relaciones entre la función y su primitiva, los cuales influyen en el aprendizaje del TFC. Luego, se realiza una actividad con otros estudiantes de la misma institución desarrollada con el GeoGebra.

Con respecto a los resultados obtenidos, el cuestionario piloto evidenció en un principio que los estudiantes tuvieron dificultades al interpretar la función representada por $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, pues no realizaron la interpretación de la integral, la acumulación, que es una herramienta para calcular áreas; también, se evidenció que la derivada no era interpretada como una razón de cambio, sino como la pendiente a una curva; por último, se observó que la noción de función y continuidad no estaban muy desarrollados.

En el segundo cuestionario se realizaron dos tareas en el aula, las cuales permitieron relacionar conceptos tratados antes por los estudiantes con el Teorema Fundamental del Cálculo –TFC–, como la noción de función, continuidad, variación y acumulación, la continuidad de una función resultó ser una condición necesaria para aplicar el TFC, esto se evidenció en la primera tarea al calcular el volumen del sólido planteado. Además, la idea de acumulación estuvo presente en las dos tareas, al igual que la noción de variación entre dos cantidades.

Para el investigador abordar el TFC usando la noción de acumulación, produjo una mejora significativa en la comprensión del concepto de integral, además permitió el logro de la estructura de los procesos de derivación e integración. Motivo por el cual Grande[47] afirma que el uso del GeoGebra facilita el aprendizaje e interpretación de las nociones de acumulación y variación de una función, pues estos son conceptos dinámicos, siendo una herramienta que permite interpretar y observar patrones de ciertas cantidades, como la sección del sólido, la acumulación al calcular las integrales, entre otras, las cuales les permiten desarrollar las nociones mencionadas.

47 Grande. “Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino”, cit.

Por otro parte, la investigación desarrollada por Picone[48] muestra los registros de representación semiótica que son empleados por los profesores de diversas instituciones públicas y privadas en São Paulo, Brasil. De los docentes que participan en la investigación, un profesor es PhD, cinco profesores tienen el grado de Doctor y sólo dos presentan el grado de Magister, los grados mencionados son en: matemáticas, educación matemática, física y educación. Además, se evidencia que tienen amplia experiencia de más de diez años en el dictado del cálculo, a excepción de uno, que sólo cuenta con dos años de experiencia, lo cual hace importante su opinión en temas relacionados a la enseñanza y aprendizaje del cálculo, en particular del Teorema Fundamental del Cálculo.

La metodología empleada por la investigadora no está explícita en la investigación, pero tiene características similares a investigaciones de tipo estudio de caso, el cual es un enfoque cualitativo. Esta metodología consiste en realizar cuestionarios y entrevistas, las que permitieron responder a las preguntas planteadas, los cuestionarios se desarrollan en tres etapas:

En la primera, se realizan ocho preguntas que tienen la finalidad de identificar el perfil profesional de los profesores, la experiencia que tienen en el cálculo, además de conocer cómo abordan el TFC en su práctica en el aula, si lo hacen de manera gráfica, en forma algebraica o si plantean ambos; además, del uso de algún libro guía para desarrollar sus clases o si recomiendan libros de consulta para los estudiantes.

En la segunda, se realizaron nueve preguntas con la finalidad de conocer el significado que tienen los profesores sobre el Teorema Fundamental del Cálculo, es decir, muestran la conexión entre las derivadas y las integrales, y de su uso como herramienta de cálculo de integrales definidas; así como conocer la opinión y las respuestas que tienen ante algunas situaciones planteadas en investigaciones realizadas en Educación Matemática, en los cuales se emplea la noción de acumulación y variación; por último, se realizan entrevistas con los profesores con la finalidad de afinar algunos detalles de la segunda etapa, por ejemplo, analizar a mayor detalle las respuestas en algunas preguntas. Se determina que en las dos primeras etapas se busca verificar si los profesores

48 Picone. "Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo", cit.

en realidad transitan entre dos o más registros de representación, o sólo realizan tratamientos en un sólo registro.

En la tercera etapa, se desarrollan las entrevistas, las cuales mostraron que los profesores están de acuerdo en que el transitar en diversos registros, como el gráfico, algebraico y verbal, es importante para abordar el Teorema Fundamental del Cálculo; así como también están de acuerdo con que las nociones de acumulación y variación son buenas alternativas para mejorar la comprensión del TFC, pero no todos los ponen en práctica, lo que se evidencia cuando el investigador afirma que sólo tres profesores movilizan los registros mencionados en su práctica. Otro resultado de las entrevistas es que los profesores dan algunas sugerencias para mejorar el desarrollo del TFC, entre las que se destaca: realizar la interpretación geométrica del mismo, usar funciones que sean discontinuas para generar conflicto en los estudiantes, plantear evaluaciones o ejemplos en las cuales las funciones no posean antiderivadas con la finalidad de lograr que los estudiantes evidencien la conexión que establece el TFC entre los procesos de integración y derivación.

De la misma manera, la investigación realizada por ANACLETO[49] consiste en analizar los conocimientos que retienen los estudiantes que han asistido a las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral –CDI– en matemáticas sobre el Teorema Fundamental del Cálculo, teniendo en cuenta su importancia y su relación con los conceptos de derivación e integración. En un principio, el estudio muestra que los conocimientos que retienen los estudiantes de Ciencias de la Computación en una universidad particular de São Paulo sobre el TFC está incompleto dado que no articulan las nociones de derivadas, integrales y continuidad, y esto es consecuencia de que sólo memorizaron los procedimientos y algoritmos de aplicación, mas no hubo una reflexión de los aspectos conceptuales del TFC; esto se evidenció en la prueba a la que fueron sometidos, la cual es denominada por la investigadora "prueba piloto". Por esa razón, la investigadora cambió a los sujetos de estudio por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la misma universidad, debido a que por su formación recibieron mayor cantidad de horas de clase en relación con el TFC.

49 ANACLETO. "Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo", cit.

El estudio realizado por la investigadora tuvo como objetivo analizar el conocimiento que moviliza a los estudiantes que asistieron a la disciplina CDI, así como evidenciar la interrelación entre la derivación y la integración, y en qué nivel se da esta. Para ello, la investigadora intenta aumentar el conocimiento de los estudiantes y verificar si los estudiantes logran identificar los siguientes puntos:

Primero, la derivada de la integral es el integrando; segundo, la integral indefinida de la derivada de una función es la función original; tercero, la integral definida de una función resulta ser la diferencia entre el valor de una función primitiva evaluada en el límite superior y el límite inferior de la integración; por último, los procesos de diferenciación e integración son inversos entre sí. Así como observar cómo los estudiantes manipulan los conceptos relacionados con el Teorema Fundamental del Cálculo, como la continuidad y la integrabilidad.

Al mismo tiempo, el marco teórico de la investigación es la dialéctica herramienta-objeto y juego de cuadros de Douady[50]. Para la autora estos componentes teóricos son herramientas poderosas debido a que ofrecen una lectura de la evolución de las nociones matemáticas y permiten el análisis del aprendizaje matemático. El juego de cuadros consiste en analizar un objeto matemático y las relaciones de este con sus diversas formulaciones, es por ello que el término cuadro puede referirse a un cuadro algebraico, aritmético, geométrico, entre otros.

Con respecto a la metodología, ésta es cualitativa. La investigadora no muestra la metodología de manera explícita, pero lo que se debe resaltar es que al realizar su primer cuestionario y notar que los estudiantes evaluados no cumplen sus expectativas, ésta los cambia; esto es una característica de la metodología de investigación-acción. Otra característica que sobresale, es que al elaborar el cuestionario con los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, la investigadora espera que estos logren evidenciar algunos puntos que se detallan como objetivo; es una característica de la Ingeniería Didáctica al contrastar la fase *a priori* con la *a posteriori*. Por tal motivo, la metodología empleada tiene aspectos de investigación acción y de ingeniería didáctica.

---

50 Régine Douady. "Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane", en *Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, fascicule 5 " Didactique des mathématiques", 1987, pp. 1 a 50, disponible en [http://www.numdam.org/article/PSMIR_1987-1988___5_A3_0.pdf].

En un primer momento, la investigadora desarrolla un cuestionario piloto con tres parejas de estudiantes de la carrera de Ciencias de la Computación, con preguntas que requieren conocimientos relacionados con: integral definida e integral impropia, derivada de una función, función continua, función primitiva y el Teorema Fundamental del Cálculo; con el cual se logra mostrar que los estudiantes no articulan las nociones de derivadas, integrales y continuidad, esto se debe a que sólo memorizaron técnicas de solución, mas no hubo una reflexión de los aspectos conceptuales del TFC; lo cual se puede deber a que no habían recibido el contenido de la disciplina de cálculo para la TFC a la profundidad requerida por la investigación.

Luego, el cuestionario final estaba compuesto por ocho preguntas y se realizó con 13 parejas de estudiantes en las horas de clase regulares en dos períodos de 45 minutos, con un intervalo de aproximadamente diez minutos; esto muestra que los estudiantes pueden calcular la integral definida de funciones polinómicas sin problemas y que ésta es interpretada como el área. En la segunda pregunta se evidencia que tienen algunos problemas para calcular la integral definida cuando la función es discontinua en un punto, es decir, no manejan bien las condiciones para aplicar la integral; en las preguntas 3 y 4 se evidencia que los estudiantes obtienen la integral definida, en la cual el límite superior es variable, de manera geométrica, se espera que realicen cálculos como en la primera pregunta. En la pregunta 5 tienen problemas al calcular la integral definida de una función con dominio partido; luego en la pregunta 6 los estudiantes tienen problemas con identificar el gráfico de la antiderivada a partir del gráfico de la función; en la pregunta 7 es el típico problema de derivar a la integral aplicando el TFC, en esta parte se evidencia que hay estudiantes que realizan la integral y luego derivan el resultado, demostrando que algunos no aplican el TFC; por último, en la pregunta 8 se pide a los estudiantes que planteen la importancia del TFC y que muestren un ejemplo donde se puede aplicar el mismo, es una pregunta abierta en la cual los estudiantes responden que la importancia radica en la relación que se establece con la derivada y la integral.

Por otra parte, el trabajo de Scucuglia[51] muestra que realizar actividades utilizando herramientas tecnológicas, como software y calculadoras gráficas, permiten al estudiante coordinar representaciones de una función en registros como el gráfico, el algebraico y el tabular, lo cual resulta de gran ayuda, en la elaboración de conjeturas, que permitirán probar el TFC usando un lenguaje no tan formal como el matemático, pero sin quitarle lógica a la prueba de la tesis de dicho teorema.

Para responder a la pregunta: ¿cómo investigan los estudiantes con calculadoras gráficas el Teorema Fundamental del Cálculo? El investigador realiza una secuencia de actividades con la calculadora y con lápiz y papel, las cuales le permitirán obtener datos que serán analizados con el marco teórico y metodológico: la concepción epistemológica *seres-humanos-con-medios*, planteada por Borba y Villarreal[52], la cual resalta el papel de los medios en el proceso de producción de conocimiento matemático.

Es por esto que la calculadora gráfica que se utiliza en las actividades es la Texas TI-83 y tiene la finalidad de condicionar el aprendizaje en los estudiantes, dos parejas que cursan el primer año de graduación en matemática de la Universidad Estatal Paulista –UNESP–. Estas calculadoras permiten formar conjeturas de algunos procesos envueltos en la integración, como por ejemplo, primero, el área exacta bajo la curva que se da cuando la suma de Riemann se realiza con infinitos rectángulos; segundo, la siguiente suma Σ_*i*^*n* $=_1 f(x_i)\ \Delta\ x$ es negativa cuando la imagen de la función es negativa; tercero, la integral definida que es el límite de la suma de Riemann con lo cual relacionan la integral con el área bajo la curva; cuarto, la integral definida que coincide con el área bajo la curva sólo cuando el integrando es una función positiva; por último, relacionan la integral definida con la antiderivada, identificando patrones que se muestran en el desarrollo de la cuarta actividad, los cuales les ayudarán a realizar formulaciones y pruebas sobre el TFC para el caso de una función positiva usando un lenguaje coloquial.

51 Scucuglia. "A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas", cit.

52 Marcelo C. Borba y Mónica E. Villarreal. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization, and experimentation*, Nueva York, Springer, 2005.

Por consiguiente, el investigador elaboró y aplicó cinco actividades con la calculadora, éstas siguen una secuencia lógica, la cual consiste en partir de lo visual e intuitivo para, luego, ir formalizándolo poco a poco. En la primera actividad, se plantea obtener el área bajo la curva para funciones positivas empleando sumas inferiores y superiores, esta actividad se realiza con la ayuda del comando *ÁREA*, el cual permite plantear la siguiente conjetura: al aumentar el tamaño de la partición, el error en el cálculo del área disminuye, además, el área exacta se dará cuando el tamaño de la partición sea infinito. La segunda actividad se realiza con el comando *ÁREA* y *SUMA*, la diferencia entre estos comandos es que en el comando *SUMA* se puede obtener la suma de infinitos rectángulos y con ello validar la conjetura que tienen los estudiantes. En la tercera actividad, se utiliza el comando $\int f(x)\, dx$, el cual permite obtener la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$, el valor obtenido, mediante este comando, se puede comparar con resultado obtenido con el comando *SUMA*, lo cual permite a los estudiantes establecer la relación entre las sumas de Riemann y la integral definida, esto es: $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ y como aplicación de este resultado se plantea la pregunta de cómo encontrar el área entre dos curvas, la cual es resuelta por los estudiante. La cuarta actividad consiste en obtener distintos resultados para la integridad definida, usando el comando $\int f(x)\, dx$ haciendo variar el límite superior.

Estos resultados permiten a los estudiantes realizar la conexión entre la integral definida de una función con su antiderivada, esto es F' $\int_a^x (x) = f(t)\, dt$. Por último, la quinta actividad consiste en calcular la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$, empleando el comando $\int (x)\, dx$, el objetivo de esta actividad es que los estudiantes puedan deducir la expresión $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$, para lo cual ellos completaron la Tabla 2.

Tabla 2
Quinta actividad

Ecuación	Intervalo	$\int_a^b f(x)dx$
$y = 2x$	[1; 2]	3
	[2; 3]	5
	[1; 3]	8
	[a, b]	$b^2 - a^2$

Fuente: Scucuglia. "A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas", cit.

A partir de la exposición de la Tabla 2, los estudiantes elaboran la siguiente conjetura: para calcular la integral definida de una función sólo hay que evaluar la antiderivada del integrando en los límites superior e inferior y restarlos, además el investigador realizó los cuadros con dos funciones más: $y = 3x^2$ e $y = 4x^3$. Con estos resultados y con el fin de establecer el resultado a más funciones se realiza una última actividad a lápiz y papel en la cual los estudiantes logran probar el TFC para funciones continúas y positivas.

Scucuglia[53] además señala que el uso de la calculadora y su carácter multirregistro determinó la formación de conjeturas que permitieron realizar la prueba del teorema, además las múltiples representaciones que ofrece la calculadora posibilitan que hacer matemática se vuelva un proceso experimental, lo que contribuye a la formación del aprendizaje como lo plantea la teoría *seres humanos con medios*.

De igual manera, la investigación realizada por Gordillo y Pino-Fan[54] es un estudio de tipo documental del objeto matemático antide-

53 Scucuglia. "A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas", cit.

54 Wilson Gordillo y Luis R. Pino-Fan. "Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada", en *Boletim de Educação Matemática*, vol. 30, n.° 55, 2016, pp. 535 a 558, disponible en [https://www.scielo.br/pdf/bolema/v30n55/1980-4415-bolema-30-55-0535.pdf].

rivada. La investigación tiene como objetivo presentar una propuesta de reconstrucción del significado holístico de referencia para la antiderivada cuya finalidad era determinar su origen. La investigación muestra que la antiderivada resulta ser un intermediario entre las derivadas y las integrales, lo que suele conocerse como el TFC.

Los investigadores utilizan la noción de configuración epistémica, que es una herramienta del Enfoque Ontosemiótico –EOS–, que les permite analizar cuatro situaciones problemáticas elaboradas teniendo en cuenta las historias que son denominadas en el EOS como configuraciones epistémicas, en las que se evidencia como la antiderivada emerge y se formaliza como objeto matemático. Los investigadores señalan que las situaciones mencionadas conforman el significado holístico del objeto y estas son: primero, el problema geométrico de las tangentes y cuadraturas, es en esta etapa donde BARROW logra unir dos conceptos separados utilizando construcciones geométricas, técnicas que fueron heredadas de los griegos. Segundo, el problema de las fluxiones y las fluentes, en esta etapa ISAAC NEWTON[55] resolvió problemas de cinemática los cuales consistían en calcular la velocidad del movimiento en un tiempo cualquiera, dada la longitud del espacio descrito, y viceversa; tercero, el problema de la relación diferenciales-sumatorias, en esta etapa GOTTFRIED LEIBNIZ[56] afirmaba que el proceso de integración consistía en el proceso de sumar y es inverso al proceso de diferenciación; por último, el problema de la identificación de funciones elementales, en esta etapa LEONHARD EULER[57] establece la diferencia entre la integral definida e indefinida, él introduce la constante de integración con la cual determina la integral completa, conocida en la actualidad como antiderivada general.

Por consiguiente, es importante para GORDILLO y PINO-FAN[58] realizar la reconstrucción de los significados parciales de un objeto matemático porque permiten mostrar la evolución del Teorema Fundamental del Cálculo a través de la historia, lo cual debería ser tomado en cuenta como referencia en los currículos de matemáticas, además es-

55 Woolsthorpe Manor, Reino Unido, 4 de enero de 1643 - Kensington, 31 de marzo de 1727.
56 Leipzig, Alemania, 1.° de julio de 1646 - Hannover, 14 de noviembre de 1716.
57 Basilea, Suiza, 5 de abril de 1707 - San Petersburgo, Rusia, 18 de septiembre de 1783.
58 GORDILLO y PINO-FAN. "Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada", cit.

tos significados pueden ayudar a identificar las dificultades del objeto matemático las que son de utilidad al momento de diseñar actividades que se realizarán en clase.

Por otro lado, la investigación de Robles, Tellechea y Font[59] muestra que las representaciones dinámicas favorecen la articulación del lenguaje numérico con el gráfico, con el analítico y con el Teorema Fundamental del Cálculo pues permite la visualización de la relación de la función con su integral, además los investigadores mencionan que el TFC representa un elemento clave porque articula objetos matemáticos del cálculo como el límite, funciones, la derivada y la integral; sin embargo, su enseñanza toma una perspectiva analítica que deja de lado la experiencia intuitiva del estudiante.

La investigación tiene como objetivo diseñar una secuencia didáctica de tareas para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo que considere la complejidad de los objetos matemáticos del cálculo y el rol de este teorema en la articulación de estos objetos, por lo que presentan una propuesta de la secuencia didáctica de tareas en donde se resalta: la conceptualización de la integral por encima de la mecanización; las perspectivas gráficas y geométricas para dar significación a los procesos de derivación e integración, es decir, promueve el proceso de visualización mediante el uso de los recursos visuales a través del software Descartes.

De esta manera, el marco teórico utilizado por los investigadores es el Enfoque Ontosemiótico –EOS– el cual les permite diseñar una secuencia de tareas que consiste en la aplicación de *applets*, empleando los cinco criterios de idoneidad:

- *La epistémica*, porque las actividades promovieron en los estudiantes la construcción del significado en torno al proceso aproximativo del área bajo una curva y el descubrimiento de la relación que existe entre la función estudiada y su función integral.

- *La cognitiva*, porque cuando el estudiante parte de la noción básica de función constante por intervalos, se acerca a la idea de variación acumulada, después infiere sobre la existencia de una función

---

59 Robles Arredondo, Tellechea Armenta y Font Moll. "Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo", cit.

que describe la variación de esta acumulación, además los alumnos grafican y conjeturan sobre la relación entre la curva obtenida y la función estudiada e interaccionan porque la redacción del material impreso y las *applets* de trabajo muestran brevedad de texto, sencillez de lenguaje y modulación de los apartados.

- *La mediacional*, porque se adecúan los recursos materiales y temporales para todos los alumnos, es decir, a todos los estudiantes se les asigna la manipulación de un *applet* en un determinado momento y los demás observan en una pantalla las interacciones con los *applets* y hacen los apuntes que consideren necesarios.

- *La emocional*, porque los alumnos se encuentran motivados y entusiasmados por su participación con los materiales de trabajo, además que se muestra integración entre los estudiantes rezagados y los aventajados.

- *La ecológica*, por la correspondencia a las expectativas curriculares y porque se espera que los significados construidos con esta secuencia didáctica de tareas propuestas faciliten el tratamiento formal posterior del TFC.

Con respecto a la metodología que guía la investigación, los autores no la muestran de manera explícita, pero se caracteriza por tener similitudes con la Ingeniería Didáctica. Por ejemplo, la manera de contrastar los datos, lo que se esperaba que realicen los estudiantes (*a priori*) con lo realizado por ellos (*a posteriori*). Además, la secuencia de tareas propuesta por estos autores está estructurada en cinco actividades en donde las tres primeras serán trabajadas por los estudiantes y los dos restantes por el profesor:

- *Actividad 1*. Se les presenta a los educandos la gráfica de tres funciones constantes en un intervalo para que construyan su respectiva función integral y observen que estas son lineales y que su representación gráfica tiene una pendiente que queda determinada por dicha constante, primero el estudiante debe trabajar con lápiz y papel y luego los *applets* Descartes para evaluar las conjeturas *a priori*.

- *Actividad 2*. Se trabaja de manera semejante, pero con un par de funciones escalonadas sencillas, aquí se espera la construcción gráfica que sugiera al estudiante la existencia de un vínculo entre la discontinuidad de la función y la no derivabilidad de la función integral.

- *Actividad 3*. Se espera llegar a la conclusión de que la integral de una función lineal es una parábola cuya concavidad depende del signo de la pendiente de la función y cuyo vértice queda determinado por la intersección de la función con el eje de las abscisas.

- *Actividad 4*. Se constituye la visualización del Teorema Fundamental del Cálculo y se sugiere su institucionalización.

- *Actividad 5*. Se constata de manera visual que la derivada de la integral es la función original lo que constituye la expresión del TFC.

Por último, los investigadores manifiestan que las representaciones dinámicas favorecen la mejor articulación del lenguaje numérico, con el gráfico y con el analítico sobre todo en relación con el TFC donde se genera evidencia visual de la relación de la función y su integral. Además, los autores expresan que, aunque los criterios de idoneidad del EOS se utilizaron *a priori* en el diseño de la secuencia didáctica de tareas presentada, también es necesario realizar diversas implementaciones y utilizar los mismos criterios de idoneidad *a posteriori* para que se pueda evaluar la calidad del proceso de instrucción y tener elementos para el rediseño si fuese necesario, para así mejorar la secuencia didáctica de tareas presentadas.

Otra investigación que sirve como referente teórico y metodológico para esta investigación es *El proceso de visualización durante el aprendizaje de las nociones de valores máximos y mínimos locales de funciones de dos variables en alumnos de ingeniería* realizada por la investigadora Vigo Ingar[60]. Esta investigación se enmarca en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval, de manera particular en las aprehensiones perceptiva, discursiva, operatoria y secuencial de un

60 Vigo Ingar. "A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais", cit.

gráfico representado en CAS Mathematica y en la articulación entre el registro gráfico y el algebraico. También se fundamenta en la Teoría de las Situaciones Didácticas de BROUSSEAU, pues se inició con la propuesta de situaciones que tiene como escenario la posición del profesor investigador al frente de un grupo de estudiantes, en un *milieu* constituido por un laboratorio de computación, preguntas y devoluciones. Con respecto a la metodología, se emplea la Ingeniería Didáctica de ARTIGUE.

Lo relevante de este trabajo no sólo es el uso de la Teoría de Registros de Representación Semiótica sino el tratamiento en el registro gráfico de funciones reales de varias variables así como las conversiones entre las representaciones en el registro algebraico y gráfico CAS, centrando su estudio en las aprehensiones en el registro gráfico y en el uso de la tecnología, en este caso CAS Mathematica como medio para el aprendizaje de los valores máximos y mínimos en varias variables.

Hasta aquí se han presentado seis investigaciones donde se evidencia la evolución del Teorema Fundamental del Cálculo a lo largo de la historia y el proceso de formación que ha tenido hasta hoy, considerado como un objeto matemático de estudio, los trabajos histórico-epistemológicos de GORDILLO y PINO-FAN[61] y GRANDE[62] muestran las dificultades que han tenido los matemáticos al estudiar y lograr formalizar el TFC, lo cual supone que esta misma dificultad se encuentra en los estudiantes, motivo por el cual SCUCUGLIA[63], PICONE[64] y ANACLETO[65] afirman que estas dificultades presentes en el TFC hacen que los estudiantes fracasen y reprueben los cursos donde se desarrolla en el TFC.

Así mismo, las investigaciones muestran que las dificultades que presentan los estudiantes al abordar el TFC son diversas. En primer

61 GORDILLO y PINO-FAN. "Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada", cit.

62 GRANDE. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", cit.

63 SCUCUGLIA. "A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas", cit.

64 PICONE. "Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo", cit.

65 ANACLETO. "Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo", cit.

lugar, Grande[66] y Picone[67] afirman que no tener conceptos sólidos de función, evita que los estudiantes interpreten la siguiente expresión $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ y peor aún que estos realicen ciertas operaciones relacionadas con tal expresión, por ello en las operaciones se manifiestan muchos cálculos repetitivos lo cual es consecuencia de la constante algebrización.

En segundo lugar, Picone[68] afirma que cuando los profesores no muestran la relación que hay entre las derivadas y las integrales mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, los estudiantes no logran entender ciertas conclusiones que brinda la tesis del teorema, lo cual se manifiesta al calcular la derivada de la función $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, los estudiantes realizan la integral para luego derivar, por lo tanto el investigador recomienda usar funciones que carezcan de primitiva.

Tercero, no abordar el Teorema Fundamental del Cálculo de manera geométrica genera en los estudiantes la creencia de que la integral sólo sirve para calcular áreas, lo cual ocasiona que se pierda una oportunidad de generar en los estudiantes nuevos conocimientos referentes a la integral y las derivadas.

En cuarto lugar, en la investigación realizada por Grande[69] se resalta que la interpretación que tienen los estudiantes de la derivada sólo como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un determinado punto, no permite diseñar situaciones contextualizadas, pues para éstas se necesita que los estudiantes interpreten la derivada como una razón de cambio. Así mismo, el investigador señala que plantear actividades usando el concepto de acumulación genera que los estudiantes relacionen la derivada con la integral en situaciones contextualizadas, además de mostrar que la continuidad no es una condición necesaria para aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo. En la Figura 6 se presentan las dificultades en la enseñanza-aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo.

---

66 Grande. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", cit.
67 Picone. "Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo", cit.
68 Ídem.
69 Grande. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", cit.

Figura 6
Dificultades presentes en el aprendizaje y la enseñanza del TFC

Debido a las dificultades mencionadas antes, los investigadores recomiendan que para superar estas dificultades se deben emplear herramientas tecnológicas como las calculadoras propuestas en Scucuglia[70] y software propuestas en Robles *et al.*[71] y buscar otras interpretaciones a la integral definida como la acumulación que plantea Grande[72]; estos son medios que permitirán a los estudiantes interpretar gráficamente el TFC, construir conjeturas para mejorar la comprensión de los aspectos conceptuales del TFC, además de ayudar a la articulación con otros temas de cálculo como la derivada, la integral, los límites y las funciones.

70 Scucuglia. "A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas", cit.
71 Robles Arredondo, Tellechea Armenta y Font Moll. "Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo", cit.
72 Grande. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", cit.

Capítulo tercero
Epistemología del teorema fundamental del cálculo

Una de las etapas del análisis preliminar del marco metodológico, la Ingeniería Didáctica de Artigue *et al.*[73], corresponde al estudio de los aspectos epistemológicos, la cual atañe a la manera en la que el Teorema Fundamental del Cálculo ha evolucionado a lo largo de la historia como objeto matemático de estudio, es decir, los cambios que ha tenido este conocimiento hasta ser presentado en la actualidad.

En el presente estudio se establecerán algunos aspectos del desarrollo del cálculo, sobre todo los relacionados al Teorema Fundamental del Cálculo, el cual establece la relación entre los procesos de derivación e integración como inversos entre sí, por tal motivo ocupa una posición destacada en el cálculo, la investigación realizada por Grande[74]. Esta relación fue planteada por Newton y Leibniz de manera independiente, los considerados inventores de cálculo pues establecieron la relación entre las integrales y las derivadas, así como reglas y anotaciones que permitieron darle bases sólidas a este nuevo conocimiento.

I. Aportes históricos

La relación entre los procesos de derivación e integración establece que, desde el punto de vista geométrico, la derivada está ligada al problema de encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, en cambio la integral está relacionada al problema de en-

---

73 Artigue, Fernández y Douady. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, cit.

74 Grande. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", cit.

contrar el área bajo la curva. "El desarrollo histórico del cálculo muestra que éste siguió un orden contrario a lo abordado en las lecciones y en los libros de cálculo usados hoy en día"[75]. La historia evidencia que los inicios de la integración se manifestaron al realizar procesos de suma, los cuales estaban relacionados con el cálculo de áreas y volúmenes; en cambio, la noción de diferenciación fue desarrollada siglos después al abordar los problemas de las tangentes a una curva y los valores máximos y mínimos que éstas alcanzan. Años más adelante, se mostró que los procesos de integración y diferenciación estaban relacionados entre sí, siendo uno el inverso del otro.

Según Campos[76], la relación entre las integrales y las derivadas no sólo fue desarrollada por Newton y Leibniz, sino que hubo matemáticos que ya la habían explorado, entre los que destacan Evangelista Torricelli[77], Isaac Barrow[78] y David Gregory[79], quienes no alcanzaron la notoriedad de Newton y Leibniz debido a que solo mantuvieron un tratamiento geométrico y no llegaron a formular una notación específica, como los matemáticos ya mencionados que lograron formular nuevas nociones y reglas que les permitieron establecer tratamientos analíticos para las nociones y reglas desarrolladas.

Hablar del origen del Teorema Fundamental del Cálculo es hablar del origen del cálculo diferencial e integral, la cual se da en el siglo xvii; aun cuando los inicios de las nociones del cálculo se dan en la antigua Grecia, cuando se abordan los problemas de las cuadraturas y cubaturas en donde sobresalen matemáticos como Eudoxo de Cnido[80] y Arquímedes[81]. El problema de las cuadraturas está relacionado con las integrales, que consistía en calcular el área de figuras planas relacionándolas con el área de un cuadrado, el cual es considerado una figura con un área fácil de calcular; mientras que el problema de las cubaturas consistía en obtener el volumen de ciertos sólidos.

---

75 Howard Eves cit. en Campos. "A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica", cit., p. 35.

76 Campos. "A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica", cit.

77 Roma, Italia, 5 de octubre de 1608 - Florencia, 25 de octubre de 1647.

78 Londres, Reino de Inglaterra, octubre de 1630 - 4 de mayo de 1677.

79 Aberdeen, Reino de Escocia, 3 de junio de 1659 - Maidenhead, Reino Unido, 10 de octubre de 1708.

80 Cnido (antigua Grecia), 408 a. C. - Cnido (antigua Grecia), 355 a. C.

81 Siracusa, Sicilia, 287 a. C. – Siracusa, 212 a. C.

Entre los matemáticos griegos que sobresalieron en el cálculo de cuadraturas se destacan:

- Hipócrates de Quíos[82], según Campos[83] este matemático realizó las primeras cuadraturas alrededor del año 440 a. C. cuando calculó el área de ciertas lúnulas (figuras planas limitadas por dos arcos de circunferencia de radios diferentes), conocidas como las lúnulas de Hipócrates. Según Boyer[84], “el problema de las lúnulas debió surgir al abordar el famoso problema de la cuadratura del círculo” (p.98).

- Antífon[85], según Grande[86] es un matemático que contribuye al desarrollo de las cuadraturas alrededor del 430 a. C., al plantear la idea de que es posible inscribir un polígono regular en un círculo, además, si se duplica el número de lados de dicho polígono regula la diferencia de áreas entre el círculo y el polígono se vuelve cada vez menor. Antífon planteaba que al seguir este proceso se podría obtener la cuadratura del círculo debido a que la cuadratura de los polígonos regulares se conocía, sin embargo, este proceso tenía el problema que no tenía fin, por lo tanto, éste no terminaría.

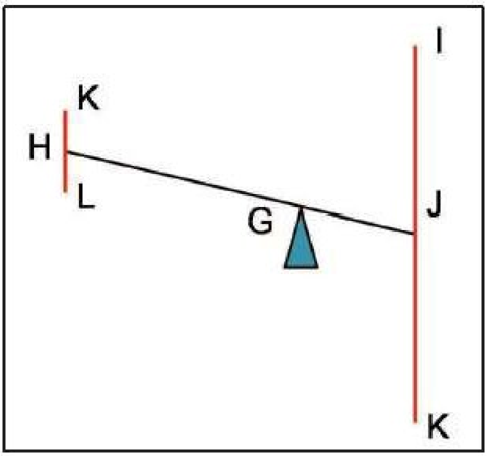
- Eudoxo[87], según Boyer[88], plantea el lema que hoy en día es conocido como el axioma de Arquímedes, este lema es la base del método de exhaución, el cálculo integral griego, debido a que permite cerrar los procesos de aproximación planteados en la época para realizar el cálculo de cuadraturas y cubaturas. El método de exhaución permite que el proceso de aproximación realizado para calcular las cuadraturas curvilíneas, como el círculo y la parábola, se convierta en un proceso completamente riguroso. Esto fue muy im-

82 Chios, Grecia, 470 a. C. - Atenas, Grecia, 410 a. C.
83 Campos. “A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica”, cit.
84 Boyer. *Historia de la matemática*, cit.
85 Ramnunte, Grecia, 479 a. C. - Atenas, Grecia, 411 a. C.
86 Grande. “Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino”, cit.
87 Cnido, Grecia, 390 a. C. - 337 a. C.
88 Boyer. *Historia de la matemática*, cit.

portante para el desarrollo de la matemática en la época, tal es así que Arquímedes atribuye a Eudoxo la primera demostración de la relación de volúmenes.

- Arquímedes, nacido en la ciudad de Siracusa y considerado como el mejor matemático de la antigüedad. Para Grande[89], este matemático perfecciona el método del exhaución, por tal motivo es quien más se aproxima al cálculo integral de la actualidad. Además, se caracteriza por emplear el método mecánico, también conocido como el método de la palanca, el cual le permitía intuir resultados por medio del equilibrio de los cuerpos, los que más adelante serían demostrados de manera rigurosa utilizando el método de exhaución apoyándose en el método de reducción al absurdo, dándole así la rigidez matemática acostumbrada en la época. En la Figura 7 se representa el método de la palanca empleado por Arquímedes.

Figura 7
Representación del método de la palanca

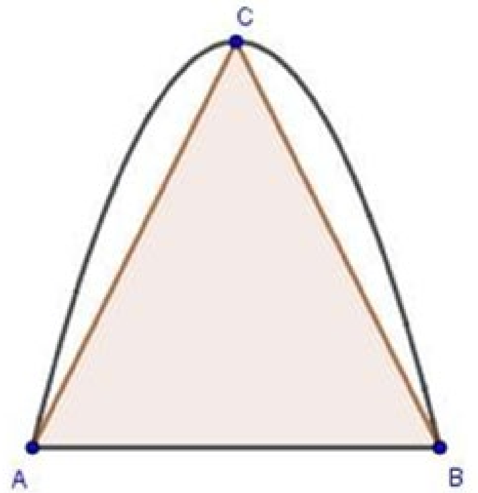


Fuente: Grande. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", cit.

89 Grande. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", cit.

Entre los cálculos realizados por ARQUÍMEDES sobresale la cuadratura de la parábola, que consistía en obtener el área de un segmento parabólico. Este resultado se representa en la Figura 8.

Figura 8
Cuadratura del segmento parabólico



ÁREA Segmento parabólico = 4/3 ÁREA Triángulo ABC

Es imperativo acotar que tuvo que pasar un largo tiempo para que las ideas de ARQUÍMEDES se desarrollaran, contribuyendo de esta manera al florecimiento del cálculo, el cual se da en los tiempos modernos, siendo más exactos en el siglo XVII con trabajos realizados por NEWTON y LEIBNIZ. De esta manera, los aportes realizados por algunos matemáticos que antecedieron a NEWTON y a LEIBNIZ, fueron los siguientes:

- *NICOLÁS ORESME*[90]

Es uno de los matemáticos que se sumó al estudio de los cambios dinámicos que por esas épocas estaba reemplazando a la matemática arquimediana, la que era en esencia estática en el sentido que se estaban estudiando problemas que relacionaban el movimiento de los cuerpos.

90 Fleury-sur-Orne, Francia, 1325 - Lisieux, Francia, 11 de julio de 1382.

En su trabajo *Tractatus de latitudinibus formarum* utilizaba un método grafico que relacionaba el álgebra con la geometría, por ello es considerado uno de los precursores de la geometría analítica. ORESME obtiene el espacio recorrido por un móvil, que se desplaza con cierta velocidad incrementándose de manera uniforme durante un determinado intervalo de tiempo, a partir del gráfico velocidad (latitud) *versus* tiempo (longitud), siendo este el área bajo la curva, lo que hoy en día seria obtener el valor de la integral $\int_0^a xdx = a^2/2$.

- *Bonaventura Cavalieri*[91]

En su libro *Geometria indivisibilibus continuorum nova ouadam ratione promota* aplica la teoría de los indivisibles de manera exitosa para calcular la medida de áreas y volúmenes. En la obra de este matemático sobresalen los famosos principios de CAVALIERI:

> 1. Si dos porciones planas son tales que toda recta secante a ellas es paralela a una determinada recta y determina segmentos cuya razón es constante, entonces la razón de las áreas es la misma constante.
>
> 2. Si dos sólidos son tales que todo plano secante a ellos es paralelo a un plano y determina secciones cuya razón es constante, entonces la razón entre los volúmenes de los sólidos es la misma constante[92].

Los principios establecidos por este matemático representaron herramientas útiles para el cálculo de áreas y volúmenes, con los cuales se pudo extender los cálculos realizados por ORESME, quien calculó la integral $\int_0^T tdt = T^2/2$, hasta calcular la integral $\int_0^T t^n dt = T^{(n+1)}/(n+1)$. Se debe mencionar que este resultado era conocido por matemáticos como TORRICELLI, FERMAT, BARROW, entre otros, pero CAVALIERI fue el primero en publicarlo.

Hasta ahora se ha determinado el desarrollo que tuvo el cálculo de cuadraturas y como éste va evolucionando de la mano con otras áreas como la geometría analítica. Sin embargo, ahora se hará referencia a la evolución de la derivada, objeto matemático presente en el Teorema Fundamental del Cálculo. Los primeros problemas relacionados a las derivadas son aquellos ligados al cálculo de las tangentes. En un

91 Milán, Italia, 1598 - Bolonia, Italia, 30 de noviembre de 1647.
92 BOYER. *Historia de la matemática*, cit., p. 11.

principio, en la época de la Grecia antigua se pensaba que la tangente a una curva es aquella recta que intercepta a una curva en un solo punto, generalización que se plantea al observar algunas curvas como la circunferencia y la parábola que satisfacen esta observación. Entre las investigaciones realizadas se destacan los trabajos de:

- Euclides (cerca del 300 a. C.), quien logra demostrar que toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio.

- Arquímedes, quien realiza un procedimiento para determinar las tangentes a la curva conocida como la espiral de Arquímedes.

- Apolonio, quien plantea métodos para determinar tangentes a parábolas, elipses e hipérbolas.

Es importante mencionar que en esta época no había indicios de alguna relación entre los problemas de las cuadraturas y las tangentes. Este problema estuvo olvidado por muchos años, recién en el siglo xvii reaparecieron de la mano con el desarrollo de la geometría analítica, por ejemplo, con la representación de una curva mediante una ecuación, con la introducción de símbolos algebraicos como herramienta para estudiar la geometría de las curvas. Con la geometría analítica se trataba de generalizar el método de encontrar la tangente a una curva, pues hasta esa época el modo de encontrar la tangente dependía mucho de la curva en consideración.

Entre los métodos planteados se destaca el método diferencial de Pierre de Fermat[93], expuesto en 1629, el cual permitía encontrar los valores máximos y mínimos de una función, que en la actualidad es equivalente a realizar el siguiente cálculo $f'(A) = \lim_{E\to 0} \frac{f(A+E) - f(A)}{E} = 0$. Se debe considerar que, al plantear este método, Fermat no se preocupaba de la notación, pues representaba las variables con minúsculas y mayúsculas, por lo que no había diferencia, además, el ignoraba que si $f'(A) = 0$ esto no implicaría que $f(A)$ sea un máximo o mínimo.

93 Beaumont-de-Lomagne, Francia, 1607 - Castres, Francia, 12 de enero de 1665.

Por otro lado, respecto a las tangentes, Fermat logró determinar las tangentes a curvas de la forma $y = x^n$ así como también de un método para calcular su integral. Este matemático conocía muy bien las reglas de diferenciación e integración para funciones de la forma $y = x^n$, tanto así que conocía que al derivar la función el exponente multiplicaba y disminuía en uno, y al integrar el exponente dividía aumentado en uno, pero no encontró nada significativo en estas relaciones al igual que sus contemporáneos matemáticos como Torricelli, Gregory y Barrow.

II. Nociones sobre el Teorema Fundamental del Cálculo

En el libro *Curso de Análise vol. 1* de Lima, se presenta el Teorema Fundamental del Cálculo en el capítulo XI, denominado "Cálculo con integrales"[94]. Este capítulo está compuesto de cinco secciones, las cuales se mostrarán en la Tabla 3, además tiene una breve introducción en donde se explica la relación que hay entre las derivadas y las integrales que se denomina Teorema Fundamental del Cálculo.

Tabla 3
Contenido del Capítulo 11

Capítulo 11 "Cálculo con integrales"	1. Teoremas clásicos del cálculo integral
	2. La integral como límite de sumas de Riemann
	3. Logaritmos y exponenciales
	4. Integrales impropias
	Ejercicios

Luego, este teorema es presentado al lector, incluyendo el enunciado y la demostración. Sin embargo, se aprecian algunas otras partes del texto como el capítulo X, titulado "La integral de Riemann", con la finalidad de estudiar las definiciones y conceptos previos a la presentación del teorema, esto debido a que las ideas presentadas por el autor están ba-

94 Lima. *Análisis Real. Volumen 1*, Santiago de Chile, Instituto de Matemática y Ciencias Afines, cit., pp. 151 a 169.

sadas en conceptualizaciones precisas y en el encadenamiento lógico de las proposiciones, característico de los textos de matemáticas.

Luego, el autor expone en el capítulo x algunas definiciones y teoremas sobre integrabilidad de funciones, estableciendo las condiciones que debe tener una función para que sea denominada integrable. Como por ejemplo, el desarrollo de la definición de integrabilidad para funciones acotadas, tal como se muestra en la Figura 9.

Figura 9
Definición de función integrable para funciones acotadas

> Una función acotada $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ se dice *integrable* cuando su integral inferior y su integral superior son iguales. Este valor común se llama *integral* (de Riemann) de f, y se denota $\int_a^b f(x)dx$.

Fuente: Lima. *Análisis Real. Volumen 1*, cit.

Del mismo modo, en páginas anteriores el autor señala que la integral superior e inferior de la función acotada f: $[a, b] \to R$ son representadas por $\underline{\int}_a^b f(x)dx$ y $\overline{\int}_a^b f(x)dx$. Para denominar estas integrales, el autor emplea representaciones en los registros lengua natural y algebraica; sin embargo, no se realiza ninguna coordinación debido a que el autor sólo utiliza dichos registros para designar una noción.

Es importante mencionar que cuando el autor plantea la definición de función integrable realiza un pequeño comentario sobre la notación empleada para representar a la integral, es decir, la variable x es denominada “variable muda” lo cual quiere decir que no hay ningún inconveniente en reemplazarla por otras variables como y, t, etc. Esto es $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt$, por tal motivo en ocasiones representará la integral $\int_a^b f(x)dx$ por $\int_a^b f$.

En cuanto a la notación de la integral, el autor utiliza dos representaciones diferentes ($\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b f$) para el mismo objeto, integrales definidas en el registro algebraico. El autor enfatiza que, a veces, por cuestión de “simplicidad” escribirá $\int_a^b f$. Es imperativo mencionar que la representación simplificada empleada por el autor no posibilita algunas formas de tratamiento, debido a que no es evidente la variable que se desea integrar, es decir, en el sentido de encontrar alguna primitiva de la función f. Sin embargo, el autor empleará esta notación cuando la misma no afecte la comprensión de la noción involucrada, por ejemplo, cuando se muestren las propiedades de la integral definida.

Seguido, a la definición de función integrable, el autor presenta y demuestra algunos lemas, teoremas y corolarios. En la Figura 10 se visualiza el enunciado del teorema 3, debido a que este resultado es usado en la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo.

Figura 10
Propiedad de la integral definida

Teorema 3. *Sean $a < c < b$. Una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable si, y sólo si, sus restricciones $f|_{[a,c]}$ y $f|_{[c,b]}$ son integrables. En caso afirmativo, se tiene $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.*

Fuente: Lima. *Análisis Real. Volumen 1*, cit.

El teorema 3 viene enunciado principalmente, a través de representaciones en el registro algebraico y lengua natural, y este último se emplea cuando las representaciones realizadas en el registro algebraico limitan la relación del objeto con su representación. Por ejemplo, la representación en lengua natural "integrable" complementa los registros simbólicos utilizados en el teorema 3, pues el autor podría usar en lugar de f| $_{[a, c]}$ "integrable" la representación algebraica ∫_(_a)^c f (x)dx =∫_a^¯c f (x)dx, pero ésta podría dificultar la comprensión de las nociones presentadas. El término "integrable" se utiliza como un registro complementario que, según Duval, es fundamental en el sentido de su parcialidad en relación con el objeto. Tal vez, propiedades de ese tipo se presentan en el registro simbólico porque el mismo posibilita tratamientos más eficaces.

En la Figura 11 se observa una propiedad importante que debe presentar el integrando para que sea integrable, es decir, la continuidad de la función f en el intervalo [a, b] y, por lo tanto, que existe la Integral (número real) definida en dicho intervalo.

Figura 11
Condición suficiente de integrabilidad

Teorema 5. *Toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable.*

Fuente: Lima. *Análisis Real. Volumen 1*, cit.

Este teorema resulta esencial para el entendimiento del Teorema Fundamental del Cálculo y para el análisis basado en la teoría de registros de representación. Además, el teorema es presentado empleando representaciones en los registros algebraicos y lengua natural, siendo este último una guía para los tratamientos realizados en el registro algebraico, como se puede observar en la Figura 12.

Figura 12
Demostración de la condición de integrabilidad

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de f en el compacto $[a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a, b]$, $|y - x| < \delta$ implican $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/(b - a)$. Sea P una partición de $[a, b]$ tal que rodos sus intervalos tienen longitud $< \delta$. En cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P existen x_i, y_i tales que $m_i = f(x_i)$ y $M_i = f(y_i)$, de donde $\omega_i = f(y_i) - f(x_i) < \varepsilon/(b - a)$. Así, $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$. Por el Teorema 2, f es integrable. $\square$

Fuente: Lima. *Análisis Real. Volumen 1*, cit.

Más adelante, en el Capítulo XI se presenta el enunciado y demostración del Teorema Fundamental del Cálculo, como se puede observar en la Figura 13, para las funciones continuas previamente se señala que con este resultado se establecerá la conexión entre la derivada y la integral.

Figura 13
Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 1. (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo I. Las siguientes afirmaciones sobre la función $F : I \to \mathbb{R}$ son equivalentes:*

(1) F es una integral indefinida de f, esto es, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in I$.

(2) F es una primitiva de f, esto es, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Fuente: Lima. *Análisis Real. Volumen 1*, cit.

De esta manera, se presenta el teorema como la equivalencia entre dos proposiciones compuestas, es decir, están relacionadas mediante un bicondicional. Además, el teorema no promueve ningún tipo de transformación interna o externa de las representaciones presentes pues el autor solo las emplea para designar una noción. Por otro lado, respecto a la demostración del teorema, consiste en dos etapas, en la primera se muestra que la proposición 1 implica la proposición 2, y en la segunda se muestra la prueba de su recíproco. Se realizan tratamientos sólo en el registro algebraico, los cuales son guiados con representaciones en el registro lengua natural que permiten darle un orden lógico a la prueba. En la Figura 14 se visualiza la demostración del teorema.

Figura 14
Demostración del Teorema Fundamental del Cálculo

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2) Si $x_0, x_0 + h \in I$ entonces $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ y $h \cdot f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt$, por tanto:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt\,.$$

Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f en el punto x_0, existe $\delta > 0$ tal que $t \in I$, $|t - x_0| < \delta$ implican $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Entonces, $0 < |h| < \delta$, $x_0 + h \in I$ implican:

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt\\ &< \frac{1}{|h|}|h|\cdot\varepsilon = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Lo que demuestra que $F'(x_0) = f(x_0)$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $F' = f$. Como acabamos de ver, si fijamos $a \in I$ y definimos $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$, tendremos $\varphi' = f$. Las dos funciones $F, \varphi : I \to \mathbb{R}$ tiene la misma derivada, luego difieren en una constante. Como $\varphi(a) = 0$, esta constante es $F(a)$. Por tanto $F(x) = F(a) + \varphi(x)$, esto es, $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in I$. $\square$

Fuente: Lima. *Análisis Real. Volumen 1*, cit.

El autor, al presentar la demostración del teorema, no muestra de manera explícita algunos resultados que utiliza, por ejemplo, en la primera parte del teorema se muestra la siguiente relación $F(x_0+h)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_{0+h}} f(x)dx$, sin embargo, no muestra los tratamientos realizados en el registro algebraico que conducen a este resultado, con esto el autor promueve el implemento de los tratamientos para llegar a dicha relación. Al finalizar la demostración del teorema, el autor realiza dos comentarios:

a) Se establece una ampliación del teorema, es decir, la validez del teorema para funciones no necesariamente continuas, sino basta que éstas sean integrables dando énfasis a las cuestiones que involucran condiciones de existencia de la primitiva: continuidad e integrabilidad.

b) Se presentan algunas propiedades de la función F, primitiva de la función f, por ejemplo, F es una función cuya derivada es continua. Además, muestra una técnica para calcular la integral de la función f en un intervalo $[a, b]$ conociendo una primitiva F. Esto es $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Del mismo modo, el texto no sugiere la contextualización, es decir, se presentan las nociones sólo en definiciones, teoremas, ejemplos y más adelante, ejercicios. El registro de representación usado en mayor proporción es el algebraico y los tratamientos hechos en él están implícitos. El registro en lengua natural se utiliza en menor proporción y las representaciones utilizadas sirven para guiar los tratamientos en el registro algebraico por lo que permiten darle un orden lógico a la prueba.

Al final, se muestran los ejercicios y no exponen de manera explícita una relación directa con el TFC. Por consiguiente, se puede observar que sus enunciados sugieren el desarrollo de aspectos conceptuales, principalmente aquellos tratados a lo largo de este capítulo, siendo la mayoría de ellos teoremas, y a su vez estos privilegian las demostraciones. En cuanto a los registros, estos ejercicios están representados en el registro algebraico y la lengua natural e indican que, en sus resoluciones, se efectuarán tratamientos en el registro algebraico; así como que tales ejercicios no sugieren la conversión de los registros, y mucho menos, la coordinación de ellos.

III. Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo

Una de las etapas del análisis preliminar del marco metodológico, la Ingeniería Didáctica de Artigue[95], corresponde al estudio de los aspectos didácticos y a la manera en que el Teorema Fundamental del Cálculo es enseñado a los estudiantes del curso de Matemáticas II de la carrera de Ingeniería de Alimentos. Bajo esta consideración, se ha seleccionado un libro de consulta con el propósito de revisar cómo se aborda el objeto de estudio Teorema Fundamental del Cálculo en el nivel de instrucción indicado. El texto a analizar es el *Cálculo de una*

95 Artigue, Moreno Fernández y Douady. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, cit.

variable de STEWART[96], donde el Capítulo V, titulado "Integrales", presenta una pequeña introducción y está subdividido en cinco secciones, entre las cuales está el Teorema Fundamental del Cálculo, tal como se visualiza en la Tabla 4.

Tabla 4
Contenido del Capítulo V del libro de STEWART

Capítulo 5 "Integrales"	Sección 5.1	Áreas y distancias
	Sección 5.2	La integral definida
	Sección 5.3	El teorema fundamental del cálculo
	Sección 5.4	Integrales indefinidas y el teorema del cambio total
	Sección 5.5	Regla de la sustitución

Es imperativo acotar que, al final de cada sección, se encuentran diversos ejercicios ya sea por los enunciados que presentan o por los objetivos que deben alcanzar cada uno de ellos. Así mismo, al finalizar la sección 5.2, el autor presenta uno de los "proyectos para un descubrimiento" titulado *Funciones de* área, el cual está compuesto de cuatro actividades que tienen como objetivo adelantar algunos resultados que serán estudiados en el capítulo siguiente, tal como se puede visualizar en la Figura 15.

96 JAMES STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, 7.ª ed., México, Cengage Learning, 2012, disponible en [https://intranetua.uantof.cl/estudiomat/calculo3/stewart.pdf].

Figura 15
Proyecto funciones de área

FUNCIONES DE ÁREA

1. (a) Trace la recta $y = 2t + 1$ y aplique la geometría para hallar el área debajo de esta recta, arriba del eje t y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 3$.
   (b) Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región que se encuentra debajo de la recta $y = 2t + 1$, entre $t = 1$ y $t = x$. Dibuje un esquema de esta región y use la geometría con el fin de hallar una expresión para $A(x)$.
   (c) Derive la función de área $A(x)$. ¿Qué advierte?
2. (a) Si $x \geq -1$, sea
$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\, dt$$
   $A(x)$ representa el área de una región. Grafique la región.
   (b) A partir de los resultados del ejercicio 28 de la sección 5.2 encuentre una expresión para $A(x)$.
   (c) Determine $A'(x)$. ¿Qué se puede observar?
   (d) Si $x \geq -1$ y h es un número positivo pequeño, por lo tanto $A(x + h) - A(x)$ representa el área de una región. Describa y grafique la región.
   (e) Dibuje un rectángulo que sea una aproximación de la región del inciso (d). Mediante la comparación de áreas de estas dos regiones demuestre que
$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$
   (f) Mediante el inciso (e) ofrezca una explicación intuitiva del resultado del inciso (c).
3. (a) Dibuje la gráfica de la función $f(x) = \cos(x^2)$ el rentángulo de visualización $[0, 2]$ por $[-1.25, 1.25]$.
   (b) Si define una nueva función g por medio de
$$g(x) = \int_{0}^{x} \cos(t^2)\, dt$$
   entonces $g(x)$ es el área debajo de la gráfica de f, desde 0 hasta x [hasta que $f(x)$ se vuelve negativa, en cuyo punto $g(x)$ se convierte en una diferencia de áreas]. Use el resultado del inciso (a) para determinar el valor de x en el cual $g(x)$ empieza a decrecer. [A diferencia de la integral del problema 2, es imposible evaluar la integral que define g para obtener una expresión explícita para $g(x)$.]
   (c) Utilice el comando de integración de su calculadora o computadora para estimar $g(0.2)$, $g(0.4)$, $g(0.6)$, ..., $g(1.8)$, $g(2)$. En seguida, con estos valores dibuje una gráfica de g.
   (d) Use la gráfica de g del inciso (c) para dibujar la gráfica de g'; use la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de una recta tangente. ¿Qué relación existe entre la gráfica de g' y la de f?
4. Suponga que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y se define una nueva función g por la ecuación
$$g(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$
   Tomando como base sus resultados en los problemas 1–3 deduzca una expresión para $g'(x)$.

Fuente: STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

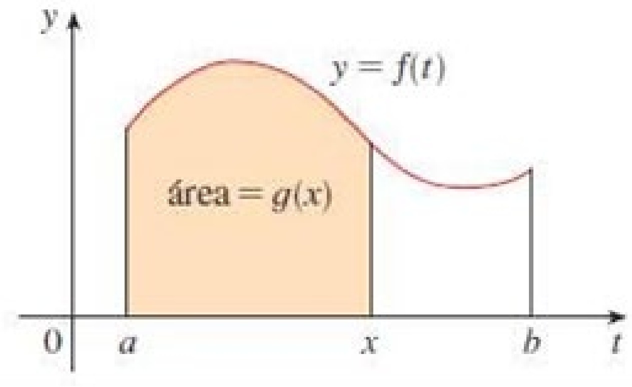
Básicamente, estas actividades consisten en bosquejar algunas curvas y relacionar las funciones que originan esas curvas y el área limitada por ellas con el eje de las abscisas. El contenido de estas actividades tiene la finalidad de que el lector perciba de manera intuitiva, que la derivada de la función "área" es la misma función que origina el gráfico que está sobre esa área ocasionando que el contenido de estas actividades exprese la tesis del Teorema Fundamental del Cálculo.

Con respecto a los enunciados de estas actividades, se presentan en el registro de la lengua natural y algebraica e invitan al lector a que, en sus resoluciones, utilice representaciones en el registro gráfico y en menor proporción, en el registro numérico; así como sugiere realizar tratamientos en el registro algebraico. Con lo mencionado, las actividades sugieren el cambio de registros, que es una condición para la comprensión de las matemáticas según DUVAL.

Por otra parte, la sección 5.3 presenta al inicio un pequeño texto en donde se señala que el TFC establece la conexión entre la derivada y la integral, rememorando los clásicos problemas de la tangente y del área que las originaron. También resalta la relación inversa entre las dos, atribuyendo a BARROW el descubrimiento de tal relación. Sin embargo, resalta que fueron NEWTON y LEIBNIZ los descubridores de dicha relación, además de usarla para desarrollar el cálculo como un método matemático sistemático.

De esta manera, STEWART presenta el Teorema Fundamental del Cálculo en dos partes, la primera está destinada a la explotación de la función $g\ (x) = ∫\_a\^x\ f(t)dt$, cuando f es continua en $[a, b]$ y x variando entre a y b. Se dice que si x es fijo, entonces la integral es definida por un número y si x varía, la integral define una función denotada por $g\ (x)$. El autor emplea los registros lengua natural y algebraica para resaltar que $g\ (x)$ representa un número que depende de x, señalando de manera explícita que si la función f es positiva, entonces $g\ (x)$ es interpretada como el área bajo el gráfico de f en $[a, x]$, lo cual era la finalidad del proyecto de descubrimiento. En la Figura 16 se visualiza el registro gráfico que emplea el autor para representar estas ideas.

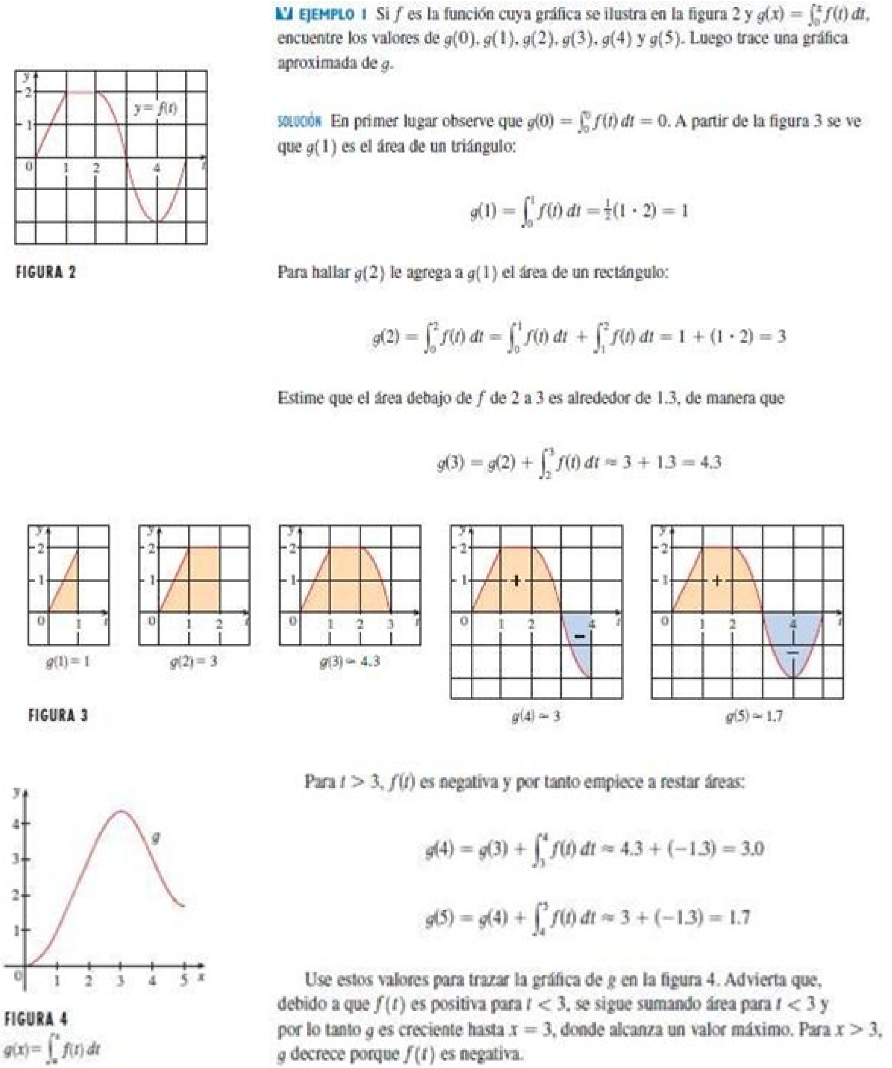
Figura 16
Representación gráfica realizada por STEWART



Fuente: STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

Antes de seguir con el discurso presentado relacionado a la función $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ y mostrar la conclusión a la que llegará $g'(x) = f(x)$, el autor presenta un primer ejemplo en el cual muestra un bosquejo en cinco etapas del gráfico de la función f con las respectivas áreas representadas por la función g en los puntos de abscisa 1, 2, 3, 4 y 5, tal como se observa en la Figura 17.

Figura 17
Procedimientos realizados para construir la función de área



EJEMPLO 1 Si f es la función cuya gráfica se ilustra en la figura 2 y $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, encuentre los valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ y $g(5)$. Luego trace una gráfica aproximada de g.

FIGURA 2

SOLUCIÓN En primer lugar observe que $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. A partir de la figura 3 se ve que $g(1)$ es el área de un triángulo:

$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para hallar $g(2)$ le agrega a $g(1)$ el área de un rectángulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estime que el área debajo de f de 2 a 3 es alrededor de 1.3, de manera que

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1.3 = 4.3$$

$g(1) = 1$ $g(2) = 3$ $g(3) \approx 4.3$ $g(4) \approx 3$ $g(5) \approx 1.7$

FIGURA 3

Para $t > 3$, $f(t)$ es negativa y por tanto empiece a restar áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7$$

Use estos valores para trazar la gráfica de g en la figura 4. Advierta que, debido a que $f(t)$ es positiva para $t < 3$, se sigue sumando área para $t < 3$ y por lo tanto g es creciente hasta $x = 3$, donde alcanza un valor máximo. Para $x > 3$, g decrece porque $f(t)$ es negativa.

FIGURA 4
$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Fuente: STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

En la figura 17, se presenta el cálculo de las áreas respectivas a cada zona realizado por el autor que, a su vez, se basan en el cálculo de áreas de triángulos, rectángulos y en aproximaciones realizadas con el área de estas figuras, mostrando que el resultado es la suma de las áreas que están por encima del eje t (representa en el eje de las abscisas), menos la suma de las áreas que están debajo del eje t. Las Figuras 2 y 4 muestran las funciones f y g respectivamente y en la Figura 3 se presentan los procedimientos realizados para la construcción de g en las áreas bajo el gráfico de f.

De esta manera, el autor expone representaciones en los registros lengua natural, algebraico, numérico y gráfico, también se evidencia conversiones de la representación de la integral definida en el registro algebraico al gráfico y viceversa, así como tratamientos en los registros numérico, algebraico y gráfico. Sin embargo, no se muestra la conexión entre la derivada y la integral.

Seguido a esto, el autor realiza un comentario que permitirá al lector establecer una correspondencia entre la derivada y la integral, apoyándose en el ejemplo anterior y en el ejercicio 27 de la sección 5.2 el cual consiste en demostrar $\int_a^b x dx = (b^2 - a^2)/2$. Se considera el valor de las constantes $a = 0$ y $b = x$, obteniendo así el resultado $\int_0^x t dt = x^2/2$, el cual en seguida es derivado permitiendo establecer la relación $d/dx \int_0^x t dt = x$ la cual muestra la conexión entre la derivada y la integral. En la figura 18 se visualiza el desarrollo para mostrar este importante resultado.

Figura 18
Ejemplo utilizado por Stewart
para mostrar la conexión entre la derivada y la integral

Si hace $f(t) = t$ y $a = 0$, después, aprovechando el ejercicio 27 de la sección 5.2, tiene

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Observe que $g'(x) = x$, es decir, $g' = f$. En otras palabras, si g se define como la integral de f mediante la ecuación 1, entonces g resulta ser, cuando menos en este caso, una antiderivada de f. Y si traza la gráfica de la derivada de la función g que se ilustra en la figura 4 al estimar las pendientes de las tangentes, obtiene una gráfica como la de f en la figura 2. Por eso, sospeche que en el ejemplo 1 también $g' = f$.

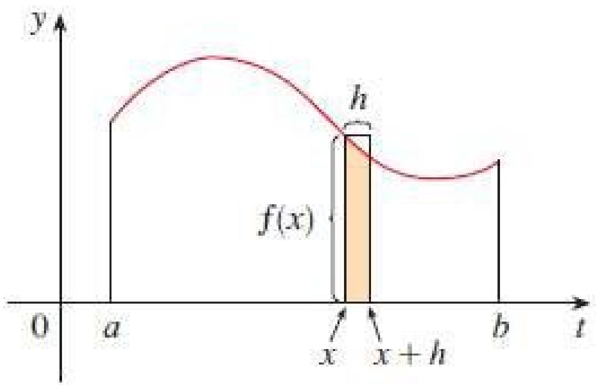
Fuente: Stewart. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

En la Figura 18, se emplean representaciones en los registros algebraicos y lengua natural, siendo ésta última una guía para los tratamientos realizados. También el autor incentiva a los estudiantes a realizar representaciones, previa conversión, en el registro gráfico indicando los tratamientos a realizar utilizando como modelo el primer ejemplo. Con esto se sugiere una coordinación de los registros algebraico y gráfico, explicitando los tratamientos en cada uno de ellos. Según DUVAL, la coordinación entre diferentes registros de representación es una condición para que haya la aprehensión del objeto o noción matemática.

Usando de nuevo el primer ejemplo, STEWART continúa su discurso, presentando de manera intuitiva la relación $g'(x) = f(x)$, pero esta vez no de manera particular, sino para una situación en la cual la función integrando $f(x)$ es una función continua y positiva. Para esto, el autor realiza conversiones de representaciones entre los registros gráfico y algebraico haciendo tratamientos, principalmente, en este último registro.

Es importante mencionar que el registro de lengua natural también está presente en el discurso. Esto se muestra cuando el autor señala que $g(x+h) - g(x)$ es aproximadamente igual al área del rectángulo de ancho $h > 0$ y altura f (x), planteando $g(x+h) - g(x) \approx h \cdot f(x)$; para llegar a esta conclusión, el autor emplea una representación gráfica, la cual se observa en la Figura 19, y con ella establecer el resultado $(g(x+h) - g(x))/h \approx f(x)$.

Figura 19
Representación gráfica empleada por STEWART



Fuente: STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

Posterior a esto, el autor considera que si h tiende a cero, el límite del primer miembro de esta relación coincide con la definición de la derivada de g en x, con lo cual se logra concluir de forma intuitiva que $g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$.

Al finalizar la prueba, se menciona que dicho resultado también es válido para la situación en que la función no sea necesariamente positiva. A partir de una nota histórica o de una noción intuitiva relativa a la función integral y su derivada y usar dos ejemplos utilizando diferentes registros de representación, STEWART enuncia la "parte 1" del Teorema Fundamental del Cálculo, conocido también como *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*, y resalta aún más esta interrelación explicando que "este teorema señala que la derivada de una integral definida con respecto a su límite superior es el integrando evaluado en su límite superior" [97].

Figura 20
Presentación TFC, parte 1

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 1. Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

Fuente: STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

Este teorema señala que la continuidad de la función f en el intervalo $[a, b]$ es una condición suficiente para que la función integral, denotada por g, sea derivable en] a, b y tenga a la función f como su derivada, para todo x en $[a, b]$. El enunciado del teorema es un discurso en el cual están presentes representaciones en el registro lengua natural y algebraica que no sugiere ninguna conversión de dichas representaciones, sin embargo, estas fueron realizadas con anterioridad.

97 STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit., p. 381.

En cuanto a la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo, el autor comienza utilizando la hipótesis de la continuidad de f para probar que la función $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en], esto quiere decir que existe el siguiente límite $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ para todo x en $[a, b]$ y además, para demostrar que ese límite es igual a $f(x)$.

En la Figura 21, se visualiza la secuencia lógica utilizada en la demostración que está basada en propiedades de la integral, las cuales son expuestas en el desarrollo.

Figura 21
Demostración del TFC. Primera parte

DEMOSTRACIÓN Si x y $x + h$ están en (a, b), entonces

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{(por la propiedad 5)}$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

y de este modo, para $h \neq 0$,

$$\boxed{2} \qquad \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Fuente: STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

De esta manera, para mostrar que el límite $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ es igual a (x) el autor utiliza algunos resultados como el teorema del valor extremo, donde toda función continua en un intervalo $[a, b]$ alcanza su máximo y su mínimo valor, y el teorema de la compresión o más conocido como el teorema del Sándwich. En la Figura 22, se observa la aplicación de estos teoremas.

Figura 22
Demostración del TFC. Segunda Parte

Por ahora suponga que $h > 0$. Puesto que f es continua en $[x, x + h]$, el teorema del valor extremo establece que hay números u y v en $[x, x + h]$ tal que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores máximo y mínimo absolutos de f en $[x, x + h]$. Véase figura 6.

De acuerdo con la propiedad 8 de las integrales, tiene

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leqslant Mh$$

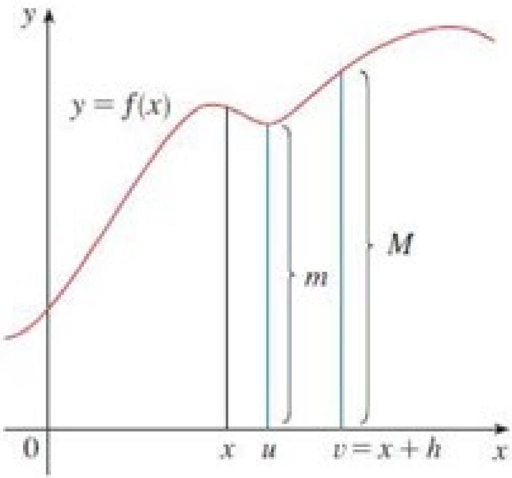
es decir,

$$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leqslant f(v)h$$

Fuente: Stewart. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

Hasta ahora se puede establecer que en el desarrollo de la demostración planteada por el autor predominan las representaciones en el registro algebraico y lengua natural, actuando como una guía que acompaña el desarrollo del discurso planteado. También que el autor representa la tesis del teorema del valor extremo utilizando representaciones en el registro gráfico, así como se puede observar en la Figura 23.

Figura 23
Representación gráfica realizada por Stewart



Fuente: Stewart. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

La representación mostrada en la Figura 23 sólo acompaña la prueba cuyo objetivo es ilustrar la acción del teorema del valor extremo para que el lector tenga un mejor entendimiento del mismo. De igual manera, el autor realiza tratamientos en el registro algebraico con la finalidad de probar el límite mencionado antes, tal como se puede observar en la Figura 24.

Figura 24
Demostración del TFC. Tercera parte

Como $h > 0$, puede dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)$$

Enseguida use la ecuación 2 para reemplazar la parte media de esta desigualdad:

$$\boxed{3} \qquad f(u) \leqslant \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

Fuente STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

En la Figura 24, los tratamientos que se pueden evidenciar en el registro son la división por h y la sustitución de la representación $1/h \int_x^{(x+h)} f(t)dt$ por la representación $(g(x+h) - g(x))/h$. El registro lengua natural como en todo el proceso es una guía en el desarrollo de la demostración. Seguido, el autor utiliza las tesis del teorema del Sándwich y emplea la continuidad de la función $f(x)$, para poder concluir que $g'(x) = f(x)$. Todos estos procesos se realizaron con representaciones en el registro algebraico, así como se muestra en la Figura 25.

Figura 25
Demostración del TFC. Cuarta parte

Se puede demostrar la desigualdad 3 de una manera similar a la del caso cuando $h < 0$. Véase ejercicio 67.

Ahora deje que $h \to 0$. Después $u \to x$ y $v \to x$, ya que u y v quedan entre x y $x + h$. Por lo tanto,

$$\lim_{h \to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x)$$

y

$$\lim_{h \to 0} f(v) = \lim_{v \to x} f(v) = f(x)$$

porque f es continua en x. De acuerdo con (3) y el teorema de la compresión que

$$\boxed{4} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Fuente: STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

Al finalizar la prueba, el autor utiliza el registro lengua natural para señalar que la función $g\ (x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$. Además, expresa la tesis del teorema en el registro algebraico utilizando la notación de LEIBNIZ para las derivadas, así como se muestra en la Figura 26.

Figura 26
Tesis del TFC "Parte uno"

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Fuente: STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

El resultado de la Figura 26 es conocido como el Teorema Fundamental del Cálculo "Parte uno". Se establece que el autor implementa representaciones en el registro lengua natural y algebraico para realizar su argumentación, además, los tratamientos son realizados en el registro algebraico. También efectúa la conversión de representaciones en el registro algebraico hacia el registro gráfico, las cuales tienen la finalidad de mostrar algunas propiedades de la integral ($mh \leq \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leq Mh$) que son empleadas en la demostración, por ejemplo cuando h tiende a cero, u y v tienden a x y debido a la continuidad de f se tiene que $f(u)$ y $f(v)$ tienden a $f(x)$.

Antes de presentar el Teorema Fundamental del Cálculo "parte 2", el autor presenta los ejemplos 2, 3 y 4 que se refieren también a la relación entre la función definida por la integral, $\int_a^x f(t)dt$, y su derivada. El objetivo de estos ejemplos es enfatizar el contenido de la "parte uno" del teorema referido. A continuación, en la Figura 27 se muestra el ejemplo 2:

Figura 27
Ejemplo 2. Enunciado y solución

EJEMPLO 2 Encuentre la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ es continua, la parte 1 del teorema fundamental del cálculo da

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

Fuente STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

La Figura 27 muestra el ejemplo 2 empleando representaciones en el registro lengua natural y algebraica (con tratamientos en él). El ejemplo demanda determinar la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt$. Al plantear la solución, el autor destaca la continuidad de $f(t) = \sqrt{1+t^2}$, entonces por Teorema Fundamental del Cálculo, se concluye que $g'(x) = \sqrt{1+x^2}$. Enseguida, se muestra el ejemplo 4 planteado por el autor en la Figura 28.

Figura 28
Ejemplo 4. Enunciado y solución

EJEMPLO 4 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\, dt$.

SOLUCIÓN En este caso debe que ser cuidadoso al usar la regla de la cadena junto con FTC1. Sea $u = x^4$. Por lo tanto

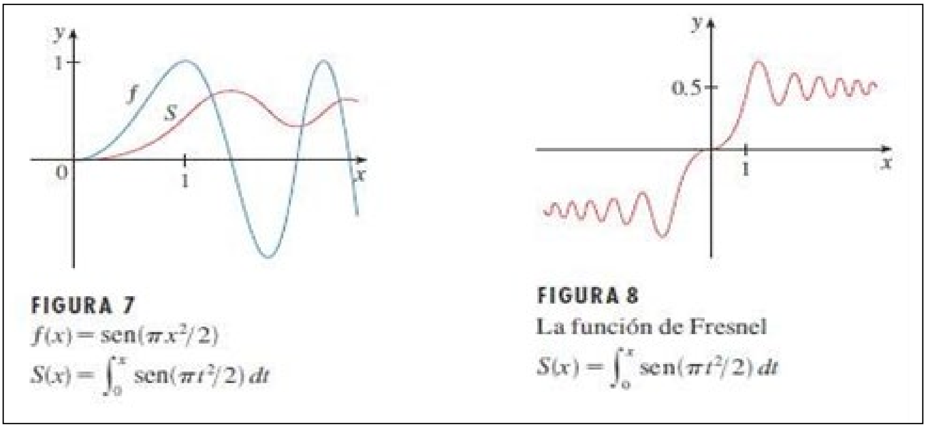
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\, dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\, dt \\
&= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\, dt\right]\frac{du}{dx} && \text{(por la regla de la cadena)} \\
&= \sec u\, \frac{du}{dx} && \text{(por TFC1)} \\
&= \sec(x^4) \cdot 4x^3
\end{aligned}$$

Fuente: Stewart. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

En la Figura 28 se establece el enunciado y la resolución del ejemplo implementando representaciones en el registro algebraico y lengua natural, además, realiza tratamientos sólo en este primer registro. Sin embargo, sólo se utilizan representaciones en el registro lengua natural para subrayar el uso de la regla de la cadena sin explicar el porqué de su empleo en la resolución, esto se da por los conocimientos previos que tienen los estudiantes de las derivadas.

En estos dos últimos ejemplos el autor no propone realizar ninguna conversión debido a que los tratamientos son realizados sólo en el registro algebraico, los cuales son notados gracias a las representaciones realizadas en lengua natural, esto se da cuando se señala la propiedad utilizada en un determinado paso de la solución. Sin embargo, la coordinación de una representación en diversos registros es propiciada en el ejemplo 3, donde la lengua natural se utiliza también para resaltar algunos aspectos históricos, además de algunas aplicaciones de la función de Fresnel, la cual según el autor, tiene la siguiente regla de correspondencia $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$. Además, debido al Teorema Fundamental del Cálculo, el autor deriva esta función obteniendo $S'(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$. Seguido, se representan las funciones S y su derivada S', la cual es denotada por f, en un mismo sistema cartesiano, realizando así una conversión de representación del registro algebraico al gráfico, tal como se plantea en la Figura 29.

Figura 29
Representaciones realizadas por STEWART



Fuente: STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

Se determina entonces, que la relación presentada entre la función f y su integral S en el registro algebraico y gráfico, promueve la coordinación de estas representaciones en estos registros debido a que permite al lector efectuar tratamientos en uno de ellos y luego realizar la conversión para efectuar estos tratamientos en el otro registro. Este ejemplo, a diferencia de los ejemplos 2 y 4, propicia la conversión en todo instante, permitiendo reconocer al objeto matemático en distintos registros. Además, no se plantean discusiones ni referencias en el libro a casos más generales de funciones integrables, es decir, en ningún momento se discute la continuidad de la función f pues en los ejemplos presentados todas las funciones empleadas como integrando son continuas, por lo que sus funciones integrales $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ son derivables.

Posterior al ejemplo 4, se determina que el proceso de calcular un integral definida como un límite de sumas de Riemann, resulta a veces “largo y difícil”. Por tal motivo señala que la “parte 2” del Teorema Fundamental del Cálculo muestra un “método más sencillo” para el cálculo de la misma. En la Figura 30 se plantea el enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo "parte 2", conocido también como el *Segundo Teorema Fundamental del Cálculo*.

Figura 30
Enunciado del TFC, parte 2

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F' = f$.

Fuente: STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

En la Figura 30, se determina que en el enunciado del teorema se implementan representaciones en el registro algebraico y lengua natural, notando la relación entre la derivada y la integral, además de que en la hipótesis de este teorema solo se pide que la función f sea continua y que se verifique $F' = f$ en el intervalo $[a, b]$, siendo estas condiciones suficientes para poder plantear la siguiente igualdad $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Es importante acotar que el autor no discute la existencia de funciones antiderivadas (primitivas) en el sentido de la continuidad e integrabilidad de la función del integrando. Esto puede deberse al resultado de que las continuas en un intervalo siempre poseen primitivas en ese intervalo. Sin embargo, menciona más adelante, en el ejemplo 9, que la integral $\int_{-1}^{3} 1/x^2\, dx$ no existe debido a que la función integrando presenta "una discontinuidad infinita" en el intervalo $[-1, 3]$. También discute la necesidad de que la función integrando debe ser acotada debido a que, en el Teorema Fundamental del Cálculo, al pedir que sea continua en un intervalo cerrado ocasiona que sea acotada. Con esto el autor aborda en un ejemplo y en algunos ejercicios cuestiones sobre la existencia de la integral, pero no hace énfasis acerca de la existencia de primitivas.

Luego, para llevar a cabo la demostración de la parte 2 del TFC, el autor se basa en la hipótesis de la continuidad f, para así poder usar la "parte 1" del TFC y plantear que la función g definida por $g(x) = \int_a^x$

$f(t)dt$ es una antiderivada de f, seguido, establece una relación con función F, antiderivada de f, y afirma que estas difieren por una constante, pues tienen la misma derivada f. Por lo tanto, como $g(a) = 0$ y $g(b) = \int_a^b f(t)dt$, emplea $F(x) = g(x) + C$ para $x = a$ y $x = b$, logrando concluir que $F(b) - (a) = g(b)$. En la figura 31, se presenta la demostración planteada por el autor.

Figura 31
Demostración del TFC, parte 2

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. De acuerdo con la parte 1, sabe que $g'(x) = f(x)$; es decir, g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f en $[a, b]$, entonces, por el corolario 4.2.7, la diferencia entre F y g es una constante:

$$\boxed{6} \qquad F(x) = g(x) + C$$

para $a < x < b$. Pero tanto F como g son continuas en $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la ecuación 6, cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$, esto también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$.

Si hace $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, obtiene

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Entonces, al aplicar la ecuación 6 con $x = b$ y $x = a$, llega a

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

□

Fuente: STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

En esta demostración se implementan representaciones en el registro algebraico y lengua natural. Además, se identifica una conversión de la representación de una propiedad, mencionada en la prueba, del registro lengua natural al registro algebraico, esto es, la conversión hecha de la representación "F y g difieren por una constante", hacia $F(x) = g(x) + C$. Posterior a esto, se realizan tratamientos en el registro algebraico debido a que son más sencillos de realizar en este registro. Una vez terminada la demostración, el autor resalta que si se conoce una antiderivada de una función, se puede obtener la integral definida de esta simplemente haciendo la diferencia de los valores de esa antiderivada, en los extremos del intervalo de integración, refiriéndose a la "parte 2" del teorema, con lo cual realiza una conversión de la $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ en el registro algebraico al registro lengua natural. Además muestra una aplicación de este resultado a la cinemática, la cual consiste en encontrar el espacio recorrido por un objeto a partir de su velocidad, todo esto empleando el registro algebraico y lengua natural.

De la misma manera, se presenta el ejemplo 8, que sobresale de los cuatro ejemplos debido a que emplea el registro gráfico a diferencia de los otros en los que sólo hay representaciones en el registro algebraico y numérico. Con respecto a la representación en el registro gráfico, ésta sólo se utiliza para representar la función integrando, tal como se muestra en la Figura 32.

Figura 32
Enunciado y resolución del ejemplo 8

EJEMPLO 8 Calcule el área bajo la curva coseno desde 0 hasta b, donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUCIÓN Puesto que una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$

$$A = \int_0^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} b$$

En particular, al hacer $b = \pi/2$, ha comprobado que el área bajo la curva coseno desde 0 hasta $\pi/2$ es $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Véase figura 9.

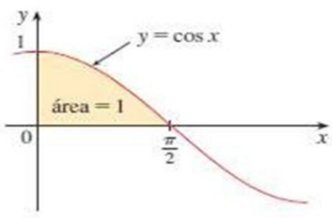


FIGURA 9

Fuente: STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

En este ejemplo, se realiza una conversión de la representación de la medida del área, limitada por la función coseno en el intervalo [0,π/2], del registro lengua natural al registro algebraico, siendo este último el registro donde se efectúan los tratamientos; así como se identifican tratamientos en el registro numérico. También, se considera que el texto no promueve la coordinación, pues aunque presenta diferentes registros de representación, no propicia el cambio de estos en todo momento. Con respecto a la conversión, esta ocurre como un simple cambio de registros.

No obstante, a diferencia de los otros cuatro, el objetivo del último ejemplo de esta sección es verificar la posibilidad de un error pues la función integrando no es continua en el intervalo de integración, el cual viene representado por [−1, 3], por tal motivo no puede aplicarse el Teorema Fundamental del Cálculo según el autor. A continuación, se muestra en la Figura 33 el enunciado y la solución de este ejemplo.

Figura 33
Enunciado y solución del ejemplo 9

EJEMPLO 9 ¿Qué es lo erróneo en el cálculo siguiente?

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\bigg]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUCIÓN Para empezar, observe que este cálculo es erróneo porque la respuesta es negativa, pero $f(x) = 1/x^2 \geq 0$ y la propiedad 6 de las integrales establecen que $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ cuando $f \geq 0$. El teorema fundamental del cálculo se aplica en las funciones continuas. En este caso no se puede aplicar porque $f(x) = 1/x^2$ no es continua en $[-1, 3]$. En efecto, f tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, de modo que

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{no existe.}$$

Fuente: Stewart. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

En este ejemplo, el autor hace hincapié en la imposibilidad de usar el Teorema Fundamental del Cálculo cuando alguna de sus hipótesis no se cumple, en este caso, considera la continuidad en el intervalo de integración. Con respecto a los tratamientos, se realizan en el registro algebraico y numérico, pero se debe considerar que el registro de lengua natural es importante debido a que permite al lector la verificación del error.

Por último, al autor cierra la sección 5.3 mostrando la unión de las dos partes del teorema conforme se observa en la Figura 34, resaltando ambos resultados que establecen que los procesos de diferenciación e integración son inversos, lo cual es la esencia del Teorema Fundamental del Cálculo y la razón por la cual adquiere el nombre que tiene.

Figura 34
Enunciado del TFC parte 1 y 2

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Suponga que f es continua sobre $[a, b]$.

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, es decir, $F' = f$

Fuente: Stewart. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

Con respecto a los registros empleados, vienen siendo los mismos que se presentaron antes, en cada parte, de manera separada. Cabe destacar que se representan las partes 1 y 2 respectivamente por $d/dx \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$ y $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$, ambas en el registro algebraico. También, se determina que estas representaciones algebraicas resaltan la relación inversa entre la derivada y la integral, sin embargo, no son conversiones dado que sólo son tratamientos en el registro algebraico. Posteriormente el autor presenta otra nota histórica, en la que cita a algunos matemáticos que contribuyeron al desarrollo del cálculo, destacando la dificultad de medir áreas, volúmenes, etc., antes de la sistematización de tal método, debido en principio a Newton y Leibniz.

En cuanto a los ejercicios propuestos, son en total 70, se encuentran al final de la sección y se caracterizan por su diversidad debido a los objetivos que presenta cada uno como el empleo de los registros de representación en el enunciado y en las resoluciones. Sin embargo, algunos ejercicios sólo emplean funciones continuas en intervalos de la forma $[a, b]$ lo cual hace que el lector no se cuestione las hipótesis del teorema. Además, muchos de los ejercicios sugieren el bosquejo de los gráficos de la función F (antiderivada) y su respectiva derivada f (función integrada), proporcionando al lector la verificación de la relación entre esas dos funciones. La primera cuestión, incluso, pide explicar “de forma clara” lo que se entiende por diferenciación e integración como procesos inversos (ésta en la lengua natural).

Al mismo tiempo, el autor hace referencia a algunas aplicaciones que se mencionan en los ejercicios, algunas de ellas, relativas a la ingeniería, la probabilidad, la estadística. La mayoría de las aplicaciones ligadas al Teorema Fundamental del Cálculo, sin embargo, son intrínsecas a las matemáticas. También, se observa que muchos de estos ejercicios propician tratamientos en por lo menos dos registros, sugiriendo de forma explícita la conversión. Algunos de ellos sugieren al lector el simple cambio de registros, otros, la coordinación entre ellos también. No obstante, pocos ejercicios o casi ninguno privilegian la demostración. Por consiguiente, se determina que la presentación del Teorema Fundamental del Cálculo sugiere la coordinación entre los registros simbólico y gráfico y, en algunos casos, la lengua natural sugiere esa coordinación.

Capítulo cuarto
Estudios sobre la metodología semiótica de la ingeniería didáctica en estudiantes universitarios

En este capítulo se presentan las características de los sujetos de investigación además de los recursos con los que se cuentan para la consumación de las actividades de la fase experimental, también se describen los instrumentos utilizados para la recolección de datos, terminando con el desarrollo del análisis *a priori*, *a posteriori* y la validación de la ingeniería, como lo indica la metodología de la ingeniería didáctica.

Esta investigación se realizó con estudiantes de la carrera Ingeniería de Alimentos de la Universidad Nacional del Callao, que cursan por primera vez la asignatura Matemáticas II, durante el ciclo académico 2017-2. El curso está compuesto por 70 estudiantes entre varones y mujeres, cuyas edades varían entre 17 y 19 años. El objeto de este estudio fue el Teorema Fundamental del Cálculo, desarrollado durante la primera semana del ciclo junto con los temas de sumatorias, integral definida, así como sus propiedades.

De esta manera, los sujetos de investigación tienen como conocimientos previos conceptos de funciones reales de variable real así como de límites, de funciones reales de variable real, continuidad de una función real de variable real, derivada de una función real de variable real y cálculo de antiderivadas; estos temas fueron tratados en el curso de Matemáticas I, además, tienen conocimientos que adquirieron en el curso de Matemáticas II como sumatorias, la integral definida como el límites de las sumas de Riemann y la interpretación de la integral como el área bajo la curva, siendo esto último imprescindible para el desarrollo de esta investigación.

La parte experimental se desarrolló con diez estudiantes quienes participaron de forma voluntaria, firmando el "Protocolo de consentimiento informado para participantes", y fueron agrupados en parejas.

Sin embargo, en el análisis sólo se consideraron dos parejas debido a su mayor desempeño desde el inicio de la experimentación hasta el final. En la Tabla 5 se detalla cada pareja asignándole un nombre a cada integrante.

Tabla 5
Sujetos de investigación

N° PAREJA	INTEGRANTES
1	Camila y Ricardo
2	Amalia y Joel

Por otro lado, para el desarrollo de la experimentación se contó con el apoyo del profesor del curso y con el apoyo de la Facultad de Ingeniería de Alimentos, que brindó su laboratorio de cómputo para llevar a cabo la experimentación.

De esta manera, se considera que la experimentación consta de una situación problema y, de acuerdo con Almouloud[98] es una actividad en donde la intención de enseñar no está implícita, pero fue pensada y diseñada con ese fin, y que está constituida por un conjunto de cuestiones abiertas y/o cerradas en un contexto más o menos matematizado las cuales presentan problemas en uno o varios dominios del saber y del conocimiento. Para el autor, la finalidad de una situación problema es el empleo de implícito, en un principio, y después explícito de nuevos objetos matemáticos mediante cuestiones que se manifiestan los estudiantes al resolver el problema.

Con respecto al diseño de la situación problema, se debe buscar que los estudiantes comprendan los datos del problema y desarrollen el problema usando los conocimientos previos que traen consigo, además, la situación debe lograr poner en juego el Teorema Fundamental del Cálculo que se quiere analizar. Así como es imprescindible que el estudiante perciba que sus conocimientos antiguos resultan insuficientes para la resolución inmediata del problema. En este sentido, la

98 Saddo Ag Almouloud. "Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos", en *REVEMAT*, vol. 11, n.° 2, 2016, pp. 109 a 141, disponible en [https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p109].

situación problema se sitúa en el contexto de la ingeniería de alimentos, en la producción de jugos, y dentro de ella se presentan dos actividades las cuales se realizarán en dos sesiones durante una semana.

La primera actividad se realizó a lápiz y papel debido a que uno de los intereses era analizar la forma en la cual los estudiantes encuentran el significado al valor de la integral definida de acuerdo con el contexto presentado. La segunda actividad se realizó con lápiz y papel, además, del uso del software GeoGebra, el cual fue necesario debido a que los estudiantes necesitaban realizar tratamientos en el registro gráfico.

Por último, para la recolección de los datos realizados se contará con una grabadora de audio y, para poder grabar el trabajo en el GeoGebra, se usará el programa Screen Record, del software aTube Catcher que es de uso libre.

I. Diagnóstico aplicado a la investigación

A. Objetivo general

Analizar la coordinación de las representaciones en los registros de representación semiótica: gráfico - algebraico - lengua natural, que los estudiantes de Ingeniería de Alimentos realizan cuando desarrollan una situación problema relacionada al Teorema Fundamental del Cálculo –TFC–.

B. Objetivos específicos

- Determinar los tratamientos realizados en el registro gráfico y algebraico por los estudiantes de Ingeniería de Alimentos cuando soluciona una situación problema relacionada al Teorema Fundamental del Cálculo –TFC–.

- Estudiar la conversión de las representaciones en el registro gráfico para el registro algebraico y viceversa, que los estudiantes de Ingeniería de Alimentos realizan cuando solucionan una situación problema relacionada al TFC.

C. Análisis de la situación problema

Las actividades que conforman la situación problema de este estudio están basadas en los análisis preliminares y en los antecedentes; en este caso, Grande[99], Robles *et al.*[100] y Anacleto[101] recomiendan realizar actividades donde se presenten tasas de variación, razones de cambio, lo que cual permitirá darle un significado al valor de la integral definida, además de que éstas deben ser abordadas empleando el proceso de acumulación, con la ayuda de un software que permita economizar tratamientos en el registro gráfico así como facilitar la percepción de estos.

Por consiguiente, este análisis se basa en la Teoría de Registros de Representación Semiótica porque es importante conocer cómo los estudiantes transitan por los diferentes registros y cómo coordinan las representaciones de los objetos presentes en el Teorema Fundamental del Cálculo, en los registros algebraico, gráfico, lengua natural y gráfico cas. En la Tabla 6, se visualiza la composición de la situación problema que se diseñó para realizar la experimentación.

Tabla 6
Descripción de la situación problema

SITUACIÓN PROBLEMA	Actividad 1	En esta actividad los estudiantes relacionan el valor de la integral definida con el volumen acumulado en un tanque de pasteurizado.
	Actividad 2	En esta actividad los estudiantes perciben la relación inversa, entre los procesos de integración y derivación, presente en el Teorema Fundamental del Cálculo, además de cómo obtener el valor de una integral definida sin emplear las sumas de Riemann.

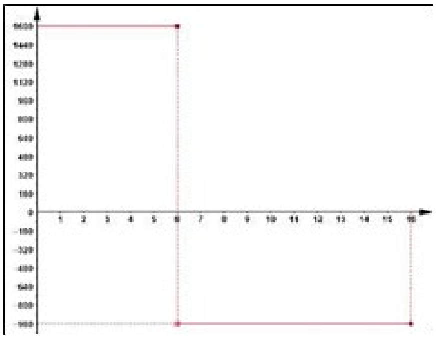
99 Grande. “Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino”, cit.
100 Robles Arredondo, Tellechea Armenta y Font Moll. “Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo”, cit.
101 Anacleto. “Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo”, cit.

1. Análisis de la actividad 1

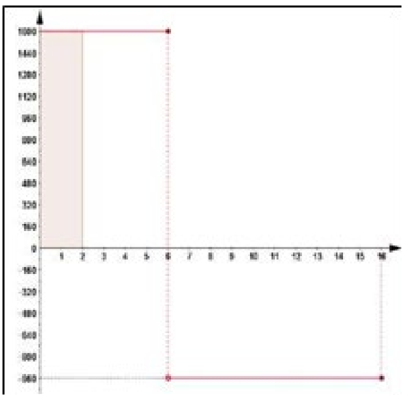
1) Actividad

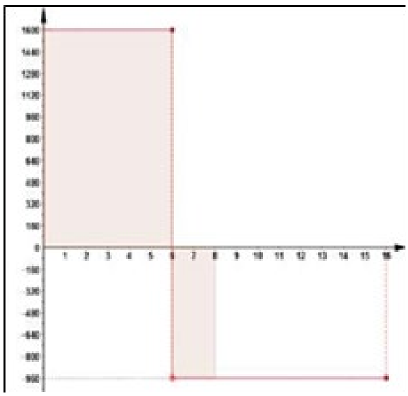
Actividad 1: Producción del jugo de mango

El gráfico muestra el comportamiento que presenta el flujo de la mezcla del zumo de mango en un tanque de pasteurizado inicialmente vacío, cuya unidad de medida está representada en litros/hora, en un día de trabajo compuesto de dos turnos de horas cada uno.



Tomando en cuenta las variables involucradas en el proceso de producción del jugo de mango, ¿qué significado tiene para usted la región sombreada en cada caso?





Una posible solución al problema es: con la información presentada en el registro de lengua natural y con las representaciones gráficas mostradas, se identifica tiempo como variable independiente, la cual se representa por t, y la razón de cambio del volumen de zumo de mango en un tanque de pasteurizado inicialmente vacío, con respecto al tiempo como variable dependiente, se representa por $V'(t)$.

Además, el gráfico mostrado en la actividad representa el comportamiento de $V'\ (t)$ a medida que transcurren las horas, donde el tiempo viene representado por el eje de las abscisas y la razón el cambio del volumen por el eje de las ordenadas, con esto se puede concluir que la región sombreada mostrada en cada ítem de la pregunta representa el volumen acumulado de la mezcla de zumo de mango en el tanque de pasteurizado a medida que transcurren las horas.

En el ítem a), la región sombreada correspondiente representa el volumen acumulado en el tanque durante las dos primeras horas, y el valor de la medida del volumen se representa con la siguiente integral definida:

∫_0 ^ (2) $V'(t)dt$ = 1.600 (2) = 3.200 litros

En el ítem b), la región sombreada representa el volumen acumulado en el tanque durante las ocho primeras horas, y la medida de este volumen se representa mediante la siguiente integral definida:

∫_0^(8) $V'(t)\ dt$ = 1.600 (6) - 960 (2) = 7.680 litros

2) Análisis *a priori*

El objetivo de esta actividad es lograr que los estudiantes relacionen la región sombreada bajo la curva con el volumen acumulado de la mezcla de zumo de mango en el tanque de pasteurización, a partir de los valores que presenta la razón de cambio. Se determina que los estudiantes podrían resolver la actividad debido a que el concepto de razón de cambio es trabajado en la asignatura de Matemáticas I, prerrequisito al curso de Matemáticas II. A continuación, se presentan las variables micro-didácticas asociadas a esta actividad y los valores que toman estas en la Tabla 7.

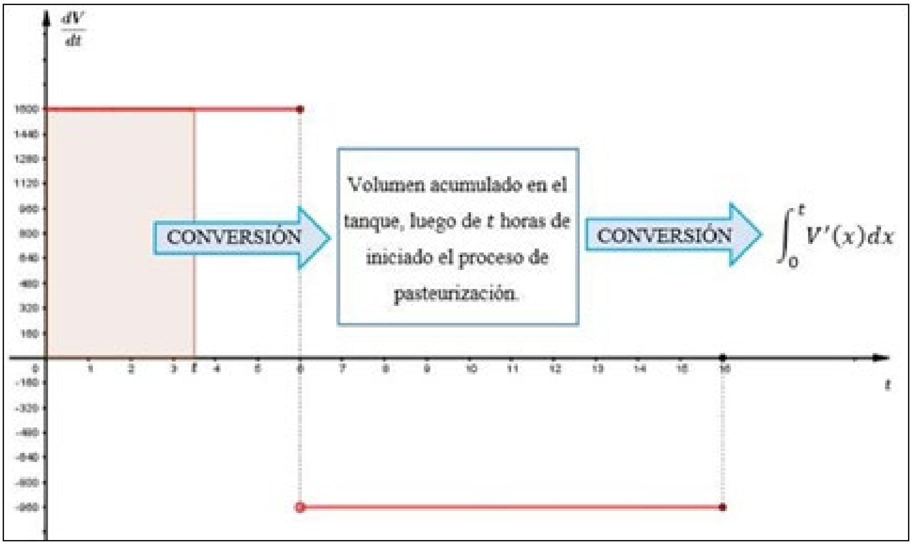
Tabla 7
Variables micro-didácticas presentes en la actividad 1

VARIABLE DIDÁCTICA	VALORES DE LA VARIABLE
El instante de tiempo en el cual se debe significar la región sombreada.	Dos horas Ocho horas
El signo que tiene la función: $V'(t)$	Función es positiva: $V'(t) > 0$ Función es negativa: $V'(t) < 0$

Por lo que se refiere al desarrollo de la actividad, se espera que las parejas lean el enunciado e intercambien ideas. Luego, podrían realizar la conversión de las representaciones presentes en el registro en lengua natural a sus respectivas representaciones en el registro algebraico, como, por ejemplo, que representen la variable independiente tiempo, con la letra t y la variable dependiente razón de cambio del volumen, con V' (t) que viene a ser la representación algebraica de la derivada de la función volumen. Seguido, se espera que los estudiantes representen el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas con la variable t con la variable V' (t) respectivamente con la finalidad de encontrar el significado de la región sombreada mostrada en los ítems a) y b).

Una vez identificadas las variables independiente y dependiente como el tiempo (en horas) y la razón de cambio del volumen (en litros por hora), los estudiantes podrían movilizar sus conocimientos previos sobre tasas de variación y razones de cambio, las cuales fueron trabajadas en cursos anteriores como Matemáticas I y Física I, para poder realizar la conversión de la representación de la región sombreada en el registro gráfico presentado hacia el registro en lengua natural, es decir, concluir que la región sombreada representa el volumen acumulado en el tanque de pasteurizado; para así realizar la conversión de esta representación hacia otra en el registro algebraico movilizando sus conocimientos de integral definida. Esto es la medida del volumen acumulado, luego de t horas, se representa mediante la integral definida ∫_0^(t) V' (t)dt. En la Figura 35 se mostrarán las conversiones que se espera que realicen los estudiantes.

Figura 35
Conversiones esperadas en el análisis *a priori*



También se espera que los estudiantes logren identificar propiedades de la función que modela la razón de cambio del volumen acumulado a medida que transcurren las horas mediante la percepción de la representación gráfica mostrada, esto quiere decir que durante las seis primeras horas el volumen de la mezcla en el tanque aumenta a razón constante de 1.600 litros/hora y durante las siguientes horas el volumen de la mezcla en el tanque disminuye a razón de 960 litros/hora. Esto permitiría a los estudiantes realizar la conversión de esta propiedad de la razón de cambio representada en el registro lengua natural al registro algebraico, como por ejemplo, $V'(t) = 1.600$, $t \in [0,6]$ y $V'(t) = -960$, $t \in]6,16[$.

Así mismo, para obtener la medida del volumen acumulado de la mezcla de zumo de mango en cada ítem se espera que las parejas realicen tratamientos en el registro numérico, cálculos numéricos (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones); por ejemplo, en el ítem a) se realizaría la siguiente multiplicación 1.600(2) = 3.200, previamente las parejas relacionarían la región sombreada con el área de un rectángulo y con ello realizarían la conversión de la representación de la medida del área de dicha región del registro gráfico al registro numérico. También, que las parejas realicen la conversión de la representación del volumen acumulado al cabo de dos horas en el registro gráfico al registro algebraico, es decir: $\int_0^{2} V'(t)dt$. Luego, los estudiantes deben percibir que ambas representaciones (en el registro numérico y en el registro algebraico) corresponden al mismo objeto matemático (volumen acumulado al cabo de dos horas), lo que quiere decir:

$$\int_0^{2} V'(t)dt = 1.600\ (2) = 3.200 \text{ litros}$$

Para resolver el ítem b) los estudiantes deberían realizar los mismos tratamientos y las conversiones explicadas para el ítem a). Además, conviene subrayar, que este ítem movilizaría sus conocimientos previos del concepto razón de cambio, los cuales corresponden a la monotonía de una función en un intervalo en relación con el signo que presente su derivada, y así nuevamente percibir que ambas representaciones (en el registro numérico y en el registro algebraico) corresponde al mismo objeto matemático (volumen acumulado al cabo de ocho horas) es decir:

$$\int_0^{8} V'(t)dt = 1.600\ (6) - 960\ (2) = 7.680 \text{ litros}$$

3) Análisis *a posteriori*

Al inicio de esta actividad las parejas leyeron el enunciado que se planteó en el problema e intercambiaron ideas tal como se había previsto en el análisis *a priori*. Es importante acotar que los estudiantes identificaron frases que les permitieron encontrar significado al problema planteado en la actividad, lo cual se manifestó en las acciones realizadas por ellos como subrayar frases y atribuirle significado a estas. En la Figura 36 se presentan las acciones realizadas por la pareja 1, como subrayar frases y encerrarlas en círculos, al interactuar con el enunciado de la actividad 1 con la finalidad de encontrar unidades significantes para darle sentido al enunciado.

Figura 36
Acciones realizadas por la pareja 1 al interactuar con la actividad 1

> Volumen .
> El gráfico muestra el comportamiento que presenta el flujo de la mezcla de zumo de mango en un tanque de pasteurizado, inicialmente vacío, cuya unidad de medida está representada en litros/hora, en un día de trabajo compuesto de dos turnos de ocho horas cada uno.

Se determina entonces, que la primera pareja asocia el término *mezcla* con el volumen en el tanque de pasteurizado debido a los comentarios que realiza la pareja, si bien no es correcto porque este término hace referencia a la razón de cambio del volumen a medida que transcurren las horas. Otra acción importante es el reconocimiento de la representación de las unidades que adquiere la razón de cambio del volumen, lo cual se dio cuando la pareja realizaba comentarios como "nos dan información de la derivada del volumen".

Después, se visualiza en la Figura 37 las acciones realizadas por la pareja 2 como el subrayado y el enmarcado de frases, al interactuar con el enunciado de la primera actividad.

Figura 37
Subrayado y significado de frases realizados por la pareja 2

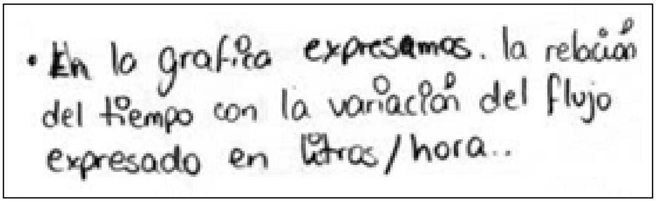
> El gráfico muestra el comportamiento que presenta el flujo de la mezcla de zumo de mango en un tanque de pasteurizado, $\boxed{\text{inicialmente vacío}}$ cuya unidad de medida está representada en litros/hora, en un día
> $V_0=0$. Volumen .
> de trabajo compuesto de dos turnos de ocho horas cada uno.

Con respecto a las acciones realizadas por la segunda pareja, se puede notar que representa la condición inicial del volumen en el registro algebraico con . Además, representa la unidad de medida *litros/hora* con el volumen, lo cual no es correcto debido a que esas unidades corresponden a la razón de cambio del volumen. Si bien las acciones realizadas por las parejas no son del todo correctas, muestran la intención de los estudiantes en darle significado a las determinadas frases al leer el enunciado. A continuación, se establece el producto realizado por las parejas al dar solución a los ítems a) y b) de la primera actividad.

– *Pareja 1*

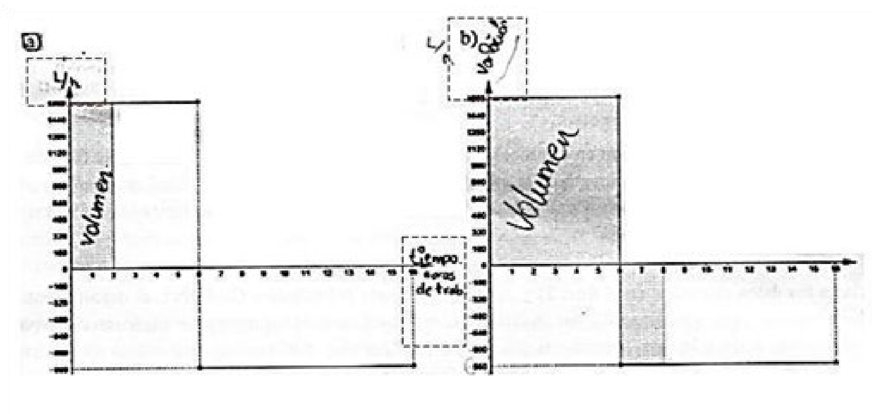
En esta actividad, la pareja logró identificar las variables presentes, las cuales fueron representadas en el registro lengua natural en el enunciado tal como se había previsto en el análisis *a priori*. Por ejemplo, esto se evidencia cuando la pareja señala que la representación gráfica muestra el comportamiento de la variación del flujo en *litros/hora*, tal como se muestra en la Figura 38.

Figura 38
Identificación de las variables presentes en el enunciado en el registro lengua natural


• En la grafica expresamos. la relación del tiempo con la variación del flujo expresado en litros/hora..

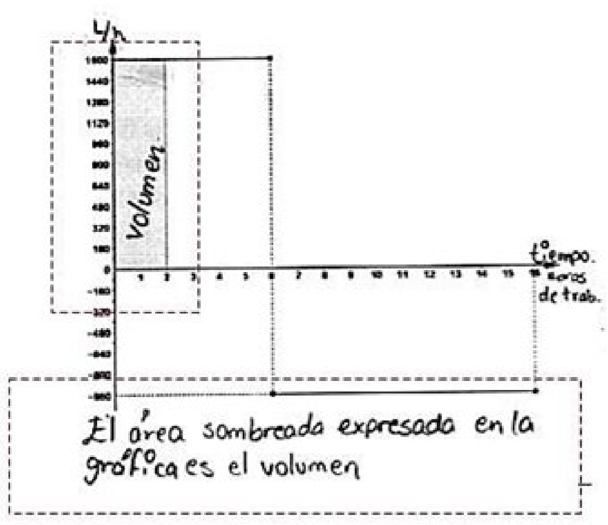
La pareja identificó las variables presentadas en la actividad, es decir, la variable independiente *tiempo* (en horas) la cual representa al eje de las abscisas, y la variable dependiente *variación del flujo* (en litros por hora) la cual fue representada en el eje de las ordenadas por el símbolo *L/h.* Estas representaciones se observan en la Figura 39, las cuales se enmarcaron para poder resaltarlas. Se resalta, además, que la pareja identificó las variables presentes en el registro de lengua natural, tal como se había previsto en el análisis *a priori*, sin embargo, no lograron realizar la conversión de estas representaciones al registro algebraico.

Figura 39
Representaciones de las variables involucradas



Luego de representar las variables presentes en la actividad 1, la pareja moviliza sus conocimientos de tasas de variación y con ello logran representar la región sombreada con el volumen acumulado en el tanque de pasteurización, así como se observa en la Figura 40, evidenciando que los estudiantes realizan la coordinación de la representación del volumen acumulado en los registros de gráfico y de lengua natural.

Figura 40
Representación del volumen acumulado

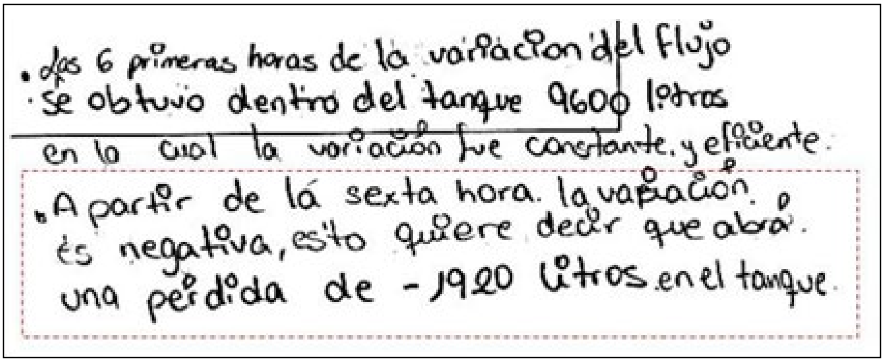


Con esto se determina que los estudiantes lograron encontrar que el significado del área sombreada, en el contexto planteado, representa el volumen acumulado por el tanque. De este modo, los estudiantes alcanzaron la comprensión del significado del área bajo la curva, tal como lo señala Duval "la comprensión en matemática supone la coordinación de al menos dos registros de representación"[102]. Sin embargo, la pareja no logró realizar la coordinación de la representación en los registros gráfico, lengua natural y algebraico, debido a que no lograron realizar la formación del registro algebraico, la cual consiste en la representación del volumen acumulado en el tanque luego de T horas con $\int_0^{T} V'(t)\,dt$.

Por otro lado, la pareja utilizó la representación gráfica de la función que modela la razón de cambio y a partir de ella movilizó sus conocimientos de derivadas, con los cuales logró identificar las propiedades de esta función. Esta acción se evidencia en la Figura 41, la cual se enmarcó, cuando los estudiantes indican que "a partir de la sexta hora la variación es negativa, esto quiere decir, que habrá una pérdida de –1.920 litros", con lo cual se plantea que los estudiantes representaron en el registro lengua natural el comportamiento del volumen a partir del signo de su razón de cambio. Con respecto al signo positivo de la razón de cambio no queda muy clara la conclusión que obtuvieron sobre el volumen acumulado durante las seis primeras horas, pues señalan que "la variación fue constante y eficiente" lo cual no establece el comportamiento esperado en el análisis *a priori*.

102 Duval. *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo:…*, cit., p. 14.

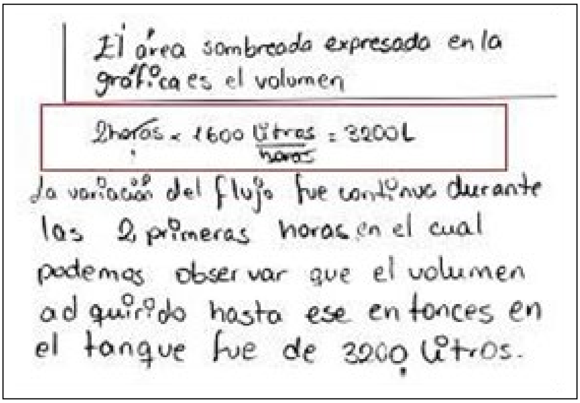
Figura 41
Representaciones en el registro lengua natural


• Las 6 primeras horas de lá variación del flujo
• se obtuvo dentro del tanque 9600 litros
en la cual la variación fue constante, y eficiente.
• A partir de lá sexta hora. la variación
és negativa, esto quiere decir que abrá.
una pérdida de -1920 litros en el tanque.

A continuación, se presenta la solución realizada por la pareja en los ítems planteados:

Ítem a): La pareja realizó la coordinación de la representación de la medida del área de la región sombreada en los registros lengua natural y numérica. La representación en lengua natural se evidencia cuando señalan que “la variación del flujo fue continua durante las dos primeras horas en la cual se puede observar que el volumen adquirido hasta ese entonces fue de 3.200 litros” (tal como se observa en la Figura 42). Además, la pareja representó de forma previa la región sombreada en el registro numérico y luego realizó tratamientos, cálculos realizados, en este registro.

Figura 42
Tratamientos realizados en el registro numérico al resolver el ítem a)


El área sombreada expresado en la gráfica es el volumen

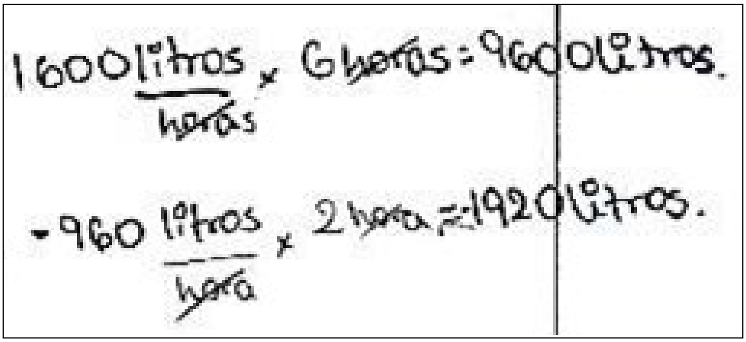
$2\text{horas} \times 1600 \frac{\text{litros}}{\text{horas}} = 3200L$

la variación del flujo fue continua durante las 2 primeras horas en el cual podemos observar que el volumen adquirido hasta ese entonces en el tanque fue de 3200 litros.

Así mismo, se señala que esta pareja no realizó la representación de la medida del volumen en el registro algebraico y por ello no se realizó la coordinación de las representaciones de este objeto en los registros algebraico, numérico y lengua natural.

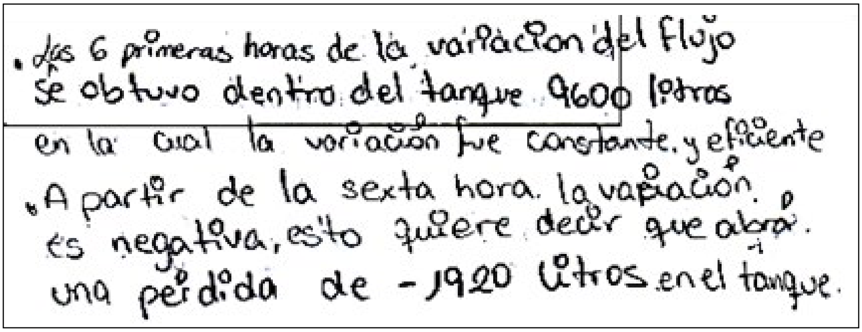
Ítem b): La pareja procedió de manera similar al ítem a), representó la región sombreada en el gráfico con el volumen acumulado en el tanque a medida que transcurrían las horas; también realizó tratamientos (tal como se visualiza en la Figura 43) en el registro numérico para obtener la medida del volumen acumulado durante las primeras seis horas y en las siguientes dos horas, por ejemplo 9.600 – 1.920 = 7.680 L, siendo este último no explícito en la ficha de trabajo, pero se realizó para obtener la respuesta a la pregunta solicitada.

Figura 43
Tratamientos en el registro numérico al resolver el ítem b)



De esta manera, se evidencian los tratamientos explícitos realizados por la primera pareja para dar solución al ítem b) de la actividad 1, considerando que esta manera de realizar las operaciones está basada en sus conocimientos previos obtenidos en los cursos Física y Química. Por otro lado, si bien la pareja no representó la medida del volumen en el registro algebraico, sí representó la región sombreada en el registro numérico donde además realizaron los tratamientos que fueron basados en sus conocimientos previos de integrales definidas, pues su procedimiento de cálculo son muy similares a la siguiente propiedad $\int_0^{8} V'(t)dt = \int_0^{6} V'(t)dt + \int_6^{8} V'(t)dt$. En la Figura 44, se visualiza la representación de la medida del volumen en el registro lengua natural durante las seis primeras horas y en las posteriores dos, siendo esta última no explícita en el enunciado, pero el cálculo realizado por los estudiantes muestra que sí lo es.

Figura 44
Representación de la medida del volumen acumulado en el registro lengua natural

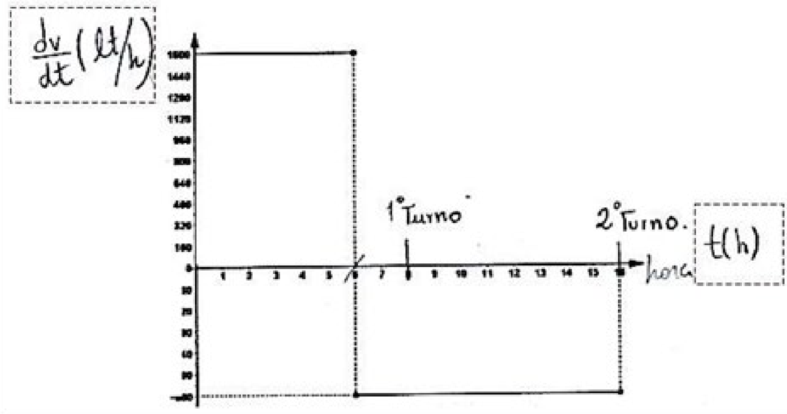


Por consiguiente, la pareja logró encontrar el significado de la región sombreada en el contexto planteado, con lo cual se cumplió el objetivo de la actividad, también el producto, realizado por los estudiantes al resolver los ítems, evidencia que lograron realizar la coordinación de la representación de la región sombreada en los registros gráfico, lengua natural y numérico.

– *Pareja 2*

En esta actividad, la pareja realizó la conversión de la representación de la variable independiente, tiempo del registro de lengua natural al registro algebraico como se había previsto en el análisis *a priori*, esto se evidencia cuando emplean la letra t para representar la cantidad de horas transcurridas; de modo similar cuando representaron la tasa de variación del flujo a medida que transcurren las horas con la representación algebraica de la derivada del volumen dV/dt, la cual es una representación equivalente a la prevista de manera *a priori* $V'(t)$. Estas representaciones se evidencian en el producto realizado por la pareja, la cual se enmarcó y se muestra en la Figura 45.

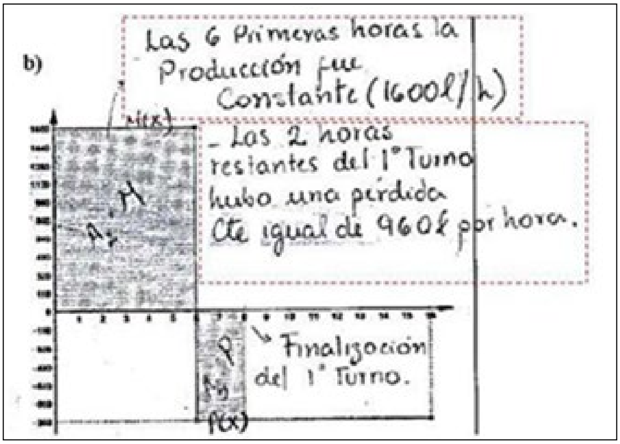
Figura 45
Representaciones de las variables involucradas



Además, la pareja representa el eje de las abscisas y ordenadas con las variables mencionadas antes, es decir, al eje x con la variable tiempo y al eje y con la razón de cambio del volumen ambas representadas con t y dV/dt respectivamente. También, la pareja identifica los turnos en los cuales opera la empresa, lo cual no fue considerado en el análisis *a priori*, debido a que no es relevante en la resolución.

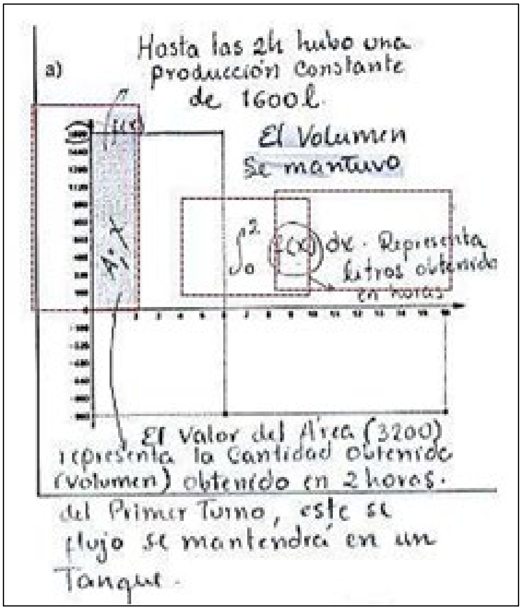
La pareja emplea la representación gráfica de la función que modela la razón de cambio para obtener información del comportamiento del volumen, para lo cual movilizan sus conocimientos previos de derivadas logrando identificar propiedades de esta. Por ejemplo, cuando los integrantes indican que durante "las seis primeras horas la producción fue constante $(1.600 lt/h)$" y "las dos horas restantes al primer turno hubo una perdida cte igual de $960 lt/h$". Con estas acciones, la pareja logra representar en el registro lengua natural el comportamiento de la razón de cambio y el valor de esta durante las seis primeras horas, así como en las siguientes dos horas, tal como lo muestra el producto realizado por los estudiantes en la Figura 46.

Figura 46
Representación del comportamiento de la razón de cambio en el registro lengua natural



Sin embargo, la pareja no logró realizar la conversión de esta última representación, la propiedad de la razón de cambio, en el registro de lengua natural hacia una representación algebraica, lo cual se había supuesto *a priori*. Además, la pareja logró plantear que la región sombreada representa el volumen acumulado, el cual es el significado que adquiere la región según el contexto presentado. Para ello realizaron la conversión de la representación del volumen en el registro gráfico hacia el registro algebraico (como se observa en la Figura 47), cuando los estudiantes establecen dicha transformación con una flecha, y luego realizan otra conversión de esta última representación hacia una en el registro lengua natural.

Figura 47
Representaciones del volumen acumulado en los registros gráfico, algebraico y lengua natural



En la figura 54, se observa que $\int_0^{2} f(x)dx$ representa algebraicamente el volumen acumulado en litros, lo cual se evidencia cuando los estudiantes le hacen corresponder la frase "litros obtenidos en horas". Si bien lo correcto sería plantear que la representación $\int_0^{2} f(x)dx$ equivale a la cantidad de litros acumulados al cabo de dos horas de iniciado el proceso, no desmerece el significado de la representación de la región sombreada. Con esto la pareja realizó la coordinación de la representación del objeto del volumen acumulado en tres registros gráfico, algebraico y lengua natural.

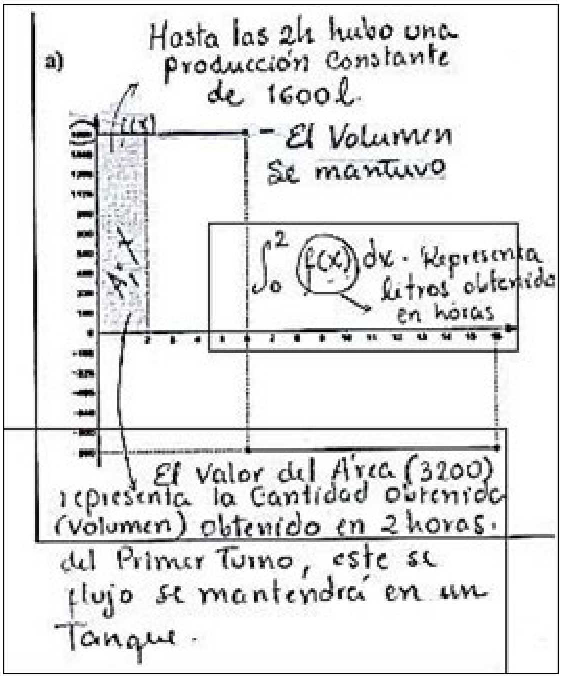
De esta manera, los estudiantes lograron realizar las conversiones que se habían supuesto en el análisis *a priori* con la única diferencia de que no lograron realizar dichas transformaciones para un instante cualquiera *t* sino para un valor tiempo en particular que fue la segunda hora; se hace la suposición de que si la pregunta hubiese sido para una hora cualquiera *t*, los estudiantes podrían haber realizado lo esperado.

A continuación, se presenta la solución realizada por la segunda pareja en los ítems planteados:

Ítem a): La pareja logra realizar la coordinación de la representación de la medida del área de la región sombreada en los registros algebraico, numérico y de lengua natural, esto se evidencia cuando señalan "el valor del área (3.200) que representa la cantidad obtenida (volumen) en dos horas"; en esta frase la pareja representa la medida del área de la región sombreada con el volumen acumulado en el tanque al cabo de dos horas, además, al obtener la medida de dicho volumen (3.200 litros), ha realizado una conversión de la representación en lengua natural al registro numérico, y previamente realizó tratamientos en el registro numérico los cuales no se presentan de manera explícita en la ficha de trabajo, pero que el profesor investigador si observó en la experimentación.

También, la pareja logró representar la medida de la región sombreada con la integral definida $\int_0^{2} V'(t)dt$ lo cual muestra que representaron la medida del volumen en los registros que se había supuesto *a priori*. En la Figura 48 se observan las acciones realizadas por la pareja al dar solución a este ítem.

Figura 48
Coordinación de la representación del objeto medida del área



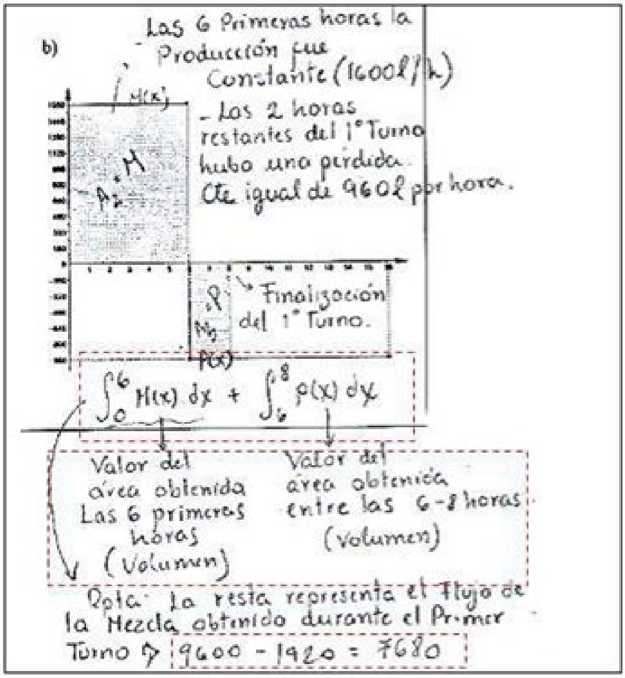
En la Figura 48 se visualiza el producto realizado por la segunda pareja, en el cual se puede observar la coordinación de la representación del volumen acumulado en los registros gráfico, algebraico, numérico y lengua natural.

Ítem b): La región sombreada en este ítem representa gráficamente el volumen acumulado en el tanque de pasteurizado, la cual es representada en el registro algebraico como $\int_0^{6} M(x)dx + \int_6^{8} P(x)dx$, esto es consecuencia de la realización de un tratamiento a la representación $\int_0^{8} V'(t)dt$ el cual no se muestra de manera explícita en la ficha de trabajo, pero que se realizó debido a sus conocimientos de integral definida y a los comentarios que realizaba la pareja, los cuales fueron documentados por los observadores.

De esta manera, los estudiantes representaron algebraicamente la función razón de cambio durante las primeras seis horas y las diez horas restantes con $M(x)$ y $P(x)$ respectivamente, estas representaciones no fueron contempladas en el análisis *a priori*, sin embargo, no impidieron dar solución a la pregunta planteada.

Por otro lado, la pareja realiza la conversión del registro algebraico al registro lengua natural, manifestándose cuando los estudiantes señalan que $\int_0^{6} M(x)\,dx$ representa el volumen acumulado durante las seis primeras horas y $\int_6^{8} P(x)\,dx$ representa el volumen acumulado entre la sexta y octava hora. Luego, realiza la conversión de esta última representación al registro numérico, manifestando el volumen acumulado durante las seis primeras horas por 9.600 litros y al volumen acumulado en las siguientes dos horas representado por –1.920 litros, y por último para dar solución a este ítem realizando un tratamiento en este registro como se había contemplado en el análisis *a priori*. En la Figura 49, se visualizan las representaciones realizadas por los estudiantes al dar solución al ítem b).

Figura 49
Representación de la medida del volumen acumulado en diferentes registros



La Figura 49 muestra la coordinación de la representación del volumen acumulado en los registros gráfico, algebraico, lengua natural y numérico; además del tratamiento realizado en el registro numérico para dar solución al ítem b). Con esto, la pareja de estudiantes no sólo ha representado el objeto de estudio en cuatro registros de representación semiótica, sino que además ha logrado coordinar dichas representaciones en los registros mencionados. Según Duval[103] con esto los estudiantes han logrado la comprensión del significado que adquiere la región sombreada en el contexto planteado, lo cual era el objetivo de la actividad.

Luego de comparar el análisis *a priori* realizado con lo desarrollado por las parejas con el análisis *a posteriori,* se puede concluir que los

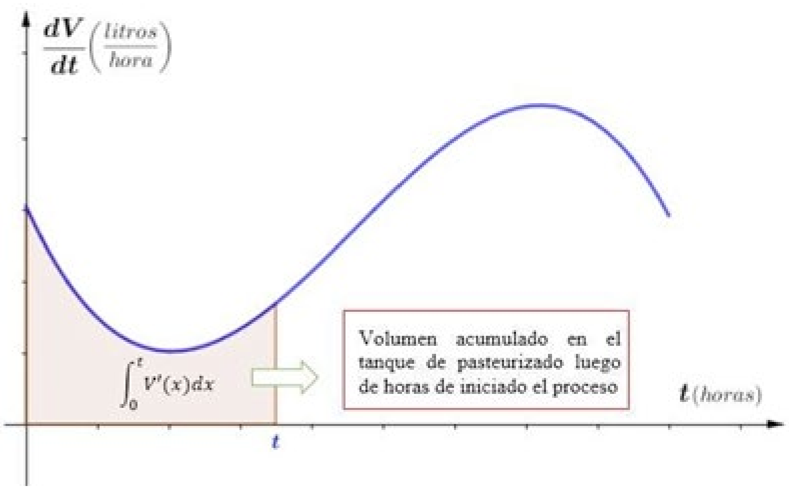
103 Duval. "Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática", cit.

estudiantes lograron establecer que la medida del área bajo la curva representa el volumen acumulado de la mezcla en el tanque de pasteurizado, con lo cual se cumple el objetivo de la actividad. Además, han logrado realizar transformaciones externas e internas, conversiones, tratamientos, con lo cual se cumplen parte de los objetivos específicos de este estudio. También se pudo verificar que la segunda pareja logró coordinar las representaciones en los registros algebraico, gráfico y lengua natural lo cual muestra el cumplimiento del objetivo general de este estudio.

4) Socialización de la actividad

Al terminar la primera actividad, se generalizan los resultados obtenidos por las parejas; el profesor investigador socializa el significado que adquiere la región sombreada en el contexto planteado como el volumen acumulado de la mezcla en el tanque de pasteurizado y la medida del área de la región que representa la medida del volumen acumulado, tal como se muestra en la Figura 50.

Figura 50
Representación del volumen acumulado en diferentes registros

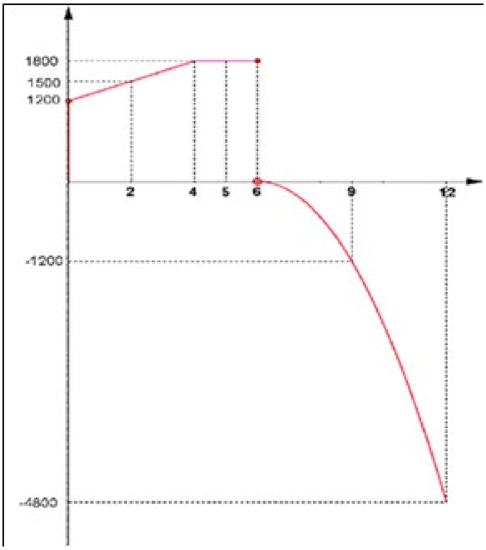


2. Análisis de la actividad 2

1) Actividad

Actividad 2: Situación inesperada en la producción

Un determinado día el ingeniero responsable de la producción detectó un retraso en la extracción del zumo de mango, por lo cual debe acelerar el proceso de pasteurizado y con ello no afectar el proceso de envasado. Para lograr este fin el ingeniero proyecta que dicho proceso se debe realizar en 12 horas y además el flujo de la mezcla en litros por hora en el tanque de pasteurizado vacío inicialmente debe seguir el comportamiento representado en el siguiente gráfico. Considere que el tramo curvo se modela con una función cuadrática con vértice en el punto (6, 0).



1. Debido a que se acelera el proceso, se debe hacer un seguimiento al volumen que se va acumulando en el tanque de pasteurizado a medida que pasan las horas. El ingeniero encargado de proceso recomienda medir el volumen de la mezcla en los siguientes tiempos:

a) A dos horas de iniciado el proceso.
b) A cinco horas de iniciado el proceso.
c) A nueve horas de iniciado el proceso.
d) A doce horas de iniciado el proceso.

2. Para tener evidencia de lo ocurrido en el proceso pasteurizado, el ingeniero solicita realizar la gráfica de la función que representa el comportamiento del volumen de la mezcla a medida que pasan las horas. Realice un esbozo de la gráfica que modela el volumen acumulado de la mezcla en el tanque a medida que pasen las horas.

3. Gracias a los datos obtenidos en los ítems 1) y 2), y con la ayuda del software GeoGebra, el departamento de producción realiza una aproximación para el comportamiento del volumen acumulado a medida que transcurren las horas; para validar el modelo encontrado y cumplir las normas de calidad establecidas el ingeniero responsable recomienda calcular el flujo (litros/hora) a partir de la representación gráfica del volumen acumulado.

Para realizar dicha validación el departamento de producción presenta un modelo aproximado del comportamiento del volumen a medida que transcurren las horas en el archivo *MODELO_APROXIMADO*.ggb, el cual está ubicado en el escritorio de cada máquina. Compruebe si el modelo presentado cumple los requerimientos del ingeniero responsable de la producción.

4. La gerencia realiza un estudio de mercado a nivel nacional, el cual muestra que el jugo es muy dulce y espeso sólo para los habitantes del departamento de Trujillo, por tal motivo la empresa decide disolver el zumo de mango que está destinado a ese departamento. El proceso de disolución del zumo consiste en agregar inicialmente 1.300 litros de agua al tanque antes de verter el zumo de mango.

El ingeniero encargado de esta producción recomienda realizar un seguimiento al volumen del zumo, ya disuelto, en el tanque a medida que transcurren las horas, para ello se debe realizar un gráfico que represente el compartimiento del volumen del zumo de mango, disuelto, en el tanque de pasteurizado a medida que transcurren las horas. Considere que la disolución de la mezcla ocurre de manera instantánea y que la mezcla que se obtiene es homogénea.

Esta actividad está compuesta por cuatro preguntas de las cuales la primera consta de cuatro ítems (a, b, c, d). Las preguntas están formuladas de manera secuencial de modo que al resolver una se pueda resolver la siguiente. Se considera que los estudiantes podrían resolver la actividad debido a que el concepto de razón de cambio, recta tangente al gráfico de una función, pendiente de una recta, función lineal, función cuadrática, integral definida son conceptos previos trabajados en las asignaturas de Matemáticas I y Matemáticas II, además no tendrán inconvenientes con el empleo del software debido a que cuentan con conocimientos del mismo.

De manera similar a la primera actividad se representa gráficamente el comportamiento que sigue la razón de cambio del volumen (en litros por hora) a medida que transcurre el tiempo (en horas). Del enunciado se puede identificar la variable independiente, el tiempo t en horas y la variable dependiente, la razón de cambio dV/dt en litros por hora; con ello se espera que los estudiantes reconozcan que el significado del área bajo la curva viene a ser el volumen acumulado en el tanque de pasteurizado.

Una posible solución de la actividad 2 es: en la primera pregunta de esta actividad el ingeniero encargado de la producción recomienda medir el volumen de la mezcla en el tanque de pasteurizado en distintos tiempos. Al cabo de dos horas el volumen acumulado de la mezcla en el tanque de pasteurizado viene dado por $\int_0^{2} V'(t)dt$ = ((1.200+1.500)/2)2 = 2.700 litros. Luego, al cabo de cinco horas el volumen acumulado es dado por $\int_0^{5} V'(t)dt$ = ((1.200+1.800)/2)4 + 1.800 (1) = 7.800 litros. De igual manera para el ítem c), el volumen acumulado de la mezcla en el tanque de pasteurizado al cabo de nueve horas es $\int_0^{9} V'(t)dt$ = ((1.200+1.800)/2)4 + 1.800 (2) - 1/3 (1.200)(3) = 8.400 litros y al cabo de 12 horas de iniciado el proceso de pasteurizado el volumen acumulado asciende a $\int_0^{12} V'(t)dt$ = ((1.200+1.800)/2)4 + 1.800 (2) - 1/3 (4.800)(6) = 0 litros, con lo cual finaliza el proceso y el tanque queda vacío. Esta pregunta también puede ser realizada con la ayuda del GeoGebra.

En la segunda pregunta, para obtener la representación solicitada de la función volumen, se procederá primero a calcular el volumen acumulado de la mezcla para cada hora, usando el comando integral del GeoGebra, previamente definida la función razón de cambio a la cual denominamos *f*. Después, se organiza una tabla con los valores del volumen en cada hora, tal como se muestra en la Tabla 8.

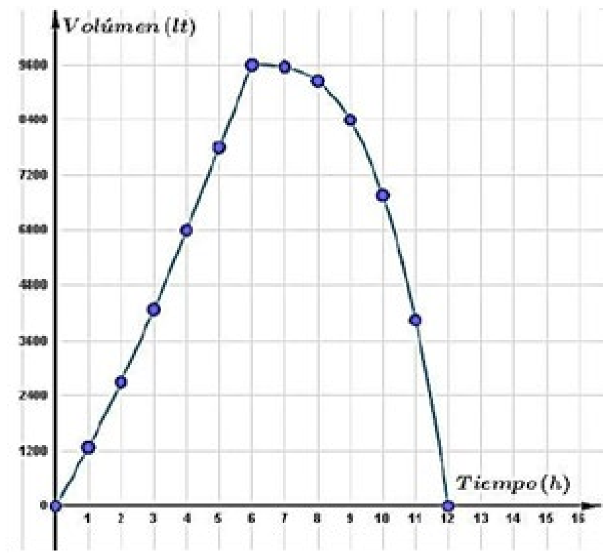
Tabla 8
Representación tabular de la función volumen a medida que transcurren las horas

t	0	1	2	3	4	5	6
$\int_0^{t} V'(t)dt$	0	1.275	2.700	4.275	6.000	7.800	9.600

7	8	9	10	11	12
9.555,56	9.244,44	8.400	6.755,56	4.044,44	0

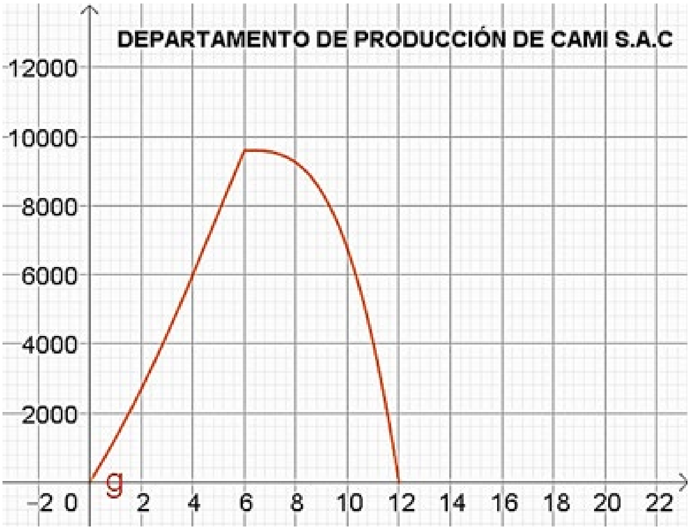
Los valores presentes en la Tabla 8 fueron obtenidos con la sentencia integral (f, 0, t), donde la variable t toma los valores de cero a 12 horas. Es importante acotar que se puede construir una tabla con más valores si es que se desea realizar un esbozo más aproximado. A continuación, en la Figura 51 se observa la representación gráfica en la tabla y la función que modela el volumen acumulado a medida que transcurren las horas.

Figura 51
Representación gráfica de los datos organizados en la tabla y de la función que modela el volumen acumulado



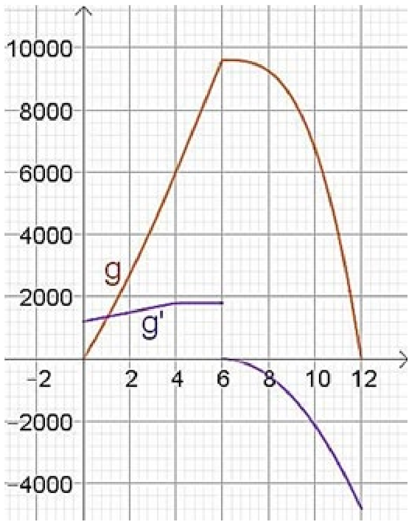
En la tercera pregunta, a diferencia de las preguntas anteriores, se debe utilizar el archivo *MODELO_APROXIMADO.ggb*; al abrir el archivo se observa una representación gráfica CAS (tal como se visualiza en la Figura 52), del modelo aproximado del comportamiento que presenta el volumen acumulado a medida que transcurren las horas.

Figura 52
Representación gráfica de la función volumen acumulado en el GeoGebra, realizada por el departamento de producción



Para dar solución a esta pregunta se debe verificar que esta representación gráfica de la función corresponda al comportamiento del volumen acumulado en el tanque de pasteurizado. De esta manera, el criterio para validar el modelo presentado consiste en obtener la representación gráfica de la derivada a partir de la representación obtenida por el departamento de producción y con esta comparar la representación obtenida con la brindada en el enunciado de la actividad 2. Para ello, se utiliza el comando *Derivada(<Función>)* del GeoGebra y la vista algebraica para visualizar la variable empleada, rótulo de la función en el software, que representa la función que define el volumen acumulado y así poder emplearla en el comando *Derivada*. Luego de realizar los pasos descritos se obtiene en la vista gráfica la representación de la función razón de cambio.

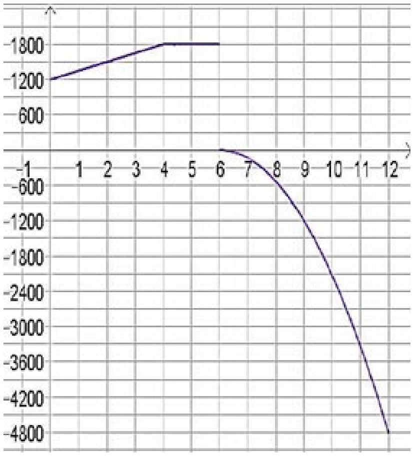
Figura 53
Representación gráfica CAS de la función razón de cambio del volumen acumulado a medida que transcurren las horas



En la Figura 53 se observa la función que representa el volumen acumulado así como el rótulo g, que presenta previa activación de este en la vista algebraica, y la representación de la razón de cambio del volumen en el registro gráfico CAS la cual ya puede ser comparada con la presentada en el enunciado de esta actividad. Para comparar la razón de cambio obtenida con el apoyo del GeoGebra con la brindada en el enunciado de la actividad se realiza un tratamiento, el cual consiste en hacer un zoom seleccionando la opción aproximar[104] del GeoGebra, en el registro gráfico CAS obteniendo la representación que se muestra en la Figura 54.

104 

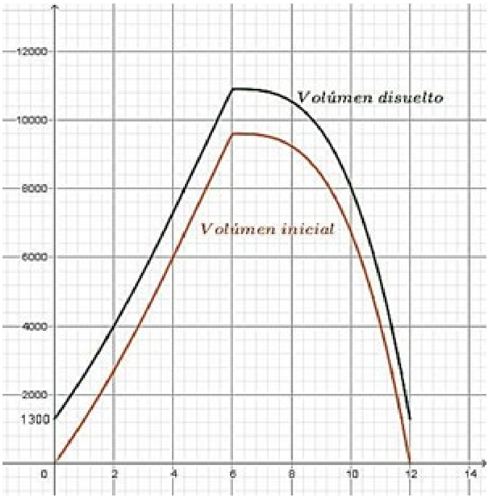
Figura 54
Representación de la razón de cambio del volumen en el registro gráfico CAS



Se puede observar que la representación mostrada en la Figura 54 coincide con la representación gráfica de la razón de cambio del volumen presentada en el enunciado de la actividad, con lo cual se comprueba que el modelo realizado por el departamento de producción efectivamente representa el comportamiento del volumen acumulado en el tanque a medida que transcurren las horas.

En la cuarta y última pregunta de la actividad se debe realizar una representación gráfica de la función que modela el volumen del mango ya disuelto. Para realizar la representación gráfica de la función pedida se utiliza la condición inicial que presenta el problema, el tanque contiene inicialmente 1.300 litros de agua que servirán para disolver la mezcla, la cual nos permitirá plantear que el volumen de la mezcla ya disuelta sea representado de manera algebraica con $V(t) = 1.300 + \int_0^{t} V'(x)dx$ cuyo gráfico se muestra en la Figura 55.

Figura 55
Representación gráfica CAS del volumen acumulado (inicial) y del volumen acumulado disuelto (final) a medida que transcurre las horas



Para representar de forma gráfica el volumen disuelto de la mezcla, señalado en la Figura 55, se emplea la sentencia g + 1.300 en la ventana de comandos del GeoGebra, donde g representa la función volumen acumulado sin disolver la obtenida en la pregunta tres.

2) Análisis *a priori*

Los objetivos de esta actividad es que los estudiantes logren:

- Realizar tratamientos en el registro numérico, gráfico y gráfico CAS con la finalidad de obtener la representación del volumen acumulado en el tanque de pasteurizado.

- Representar la función que modela el volumen acumulado en el tanque de pasteurizado en el registro algebraico, gráfico y registro gráfico CAS.

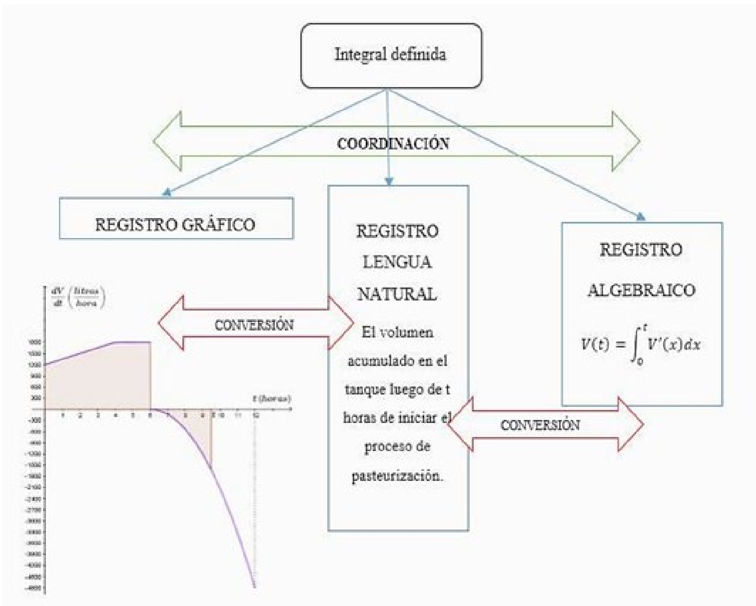
De esta manera, la actividad busca alcanzar los objetivos específicos y con ellos el objetivo general de esta investigación. Se presenta en la Tabla 9 las variables micro-didácticas presentes en la actividad:

Tabla 9
Variables micro-didácticas movilizadas en la actividad 2

VARIABLE DIDÁCTICA	VALORES DE LA VARIABLE
El comportamiento que tiene la función razón de cambio	Lineal $f(x) = mx + b$ Constante $f(x) = c$ Cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$
El comportamiento de la función de manera explícita en la representación gráfica presentada en el archivo *MODELO_APROXIMADO.ggb*	Implícito Explícito
Vista algebraica en el GeoGebra	Expuesta Oculta

Con respecto al desarrollo de la segunda actividad, las parejas leerán el enunciado, intercambiarán ideas y con estas acciones se espera que realicen la coordinación de la representación del volumen acumulado de la mezcla luego de *t* horas en los registros gráfico, algebraico y lengua natural conforme se muestra en la Figura 56.

Figura 56
Coordinación de la representación en los registros gráfico, algebraico y lengua natural de la representación de la integral definida

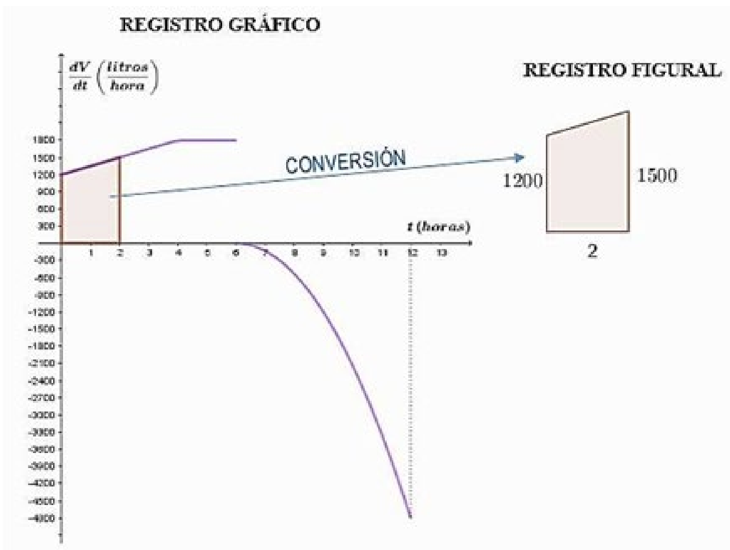


La Figura 56 muestra las representaciones del volumen acumulado y la integral definida en el contexto de la situación problema en los registros esperados. Estas conversiones podrán ser realizadas por las parejas debido a sus conocimientos previos de cálculo integral y a lo realizado en la primera actividad, donde encontró que el área bajo la curva representa el volumen acumulado de la mezcla en el tanque de pasteurizado, además, esta se representa algebraicamente como $V(t) = \int_0^{t} V'(x)dx$.

– *Pregunta 1*

Para dar solución al ítem a) se espera que las parejas realicen la coordinación de la representación del volumen acumulado al cabo de dos horas en los registros gráfico, algebraico y lengua natural; luego, para obtener la medida del volumen acumulado, al cabo de dos horas, realicen la conversión de la representación del registro gráfico al registro figural de la siguiente manera: los estudiantes asociarían la región que representa el volumen acumulado en el registro gráfico con la superficie de un trapecio y con ello la medida del volumen acumulado es igual a la medida del área del trapecio determinado tal como se observa en la Figura 57.

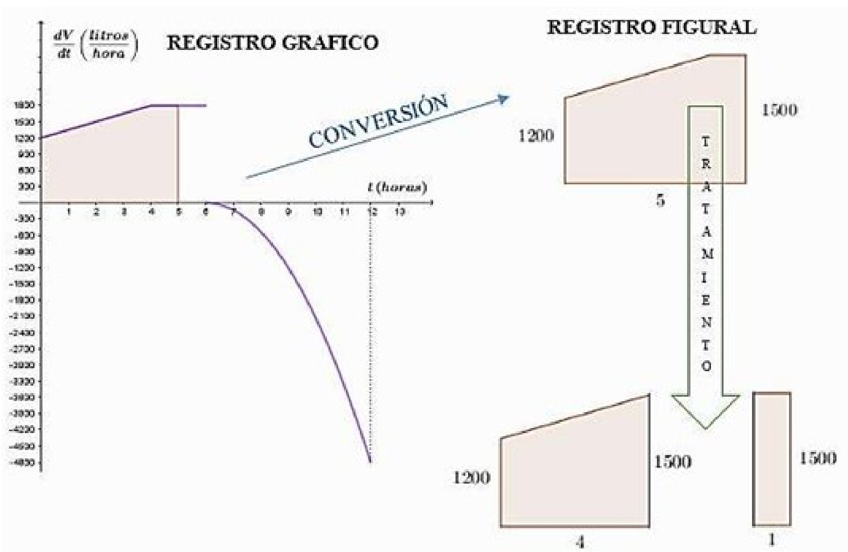
Figura 57
Conversión del volumen acumulado al cabo de dos horas del registro gráfico al registro figural



Una vez realizada la conversión, se espera que los estudiantes realicen otra conversión de esta representación, en el registro figural, al registro numérico obteniendo así la medida del volumen solicitado de la siguiente manera $\int_0^{(2)} V'(t)dt$=((1.200 + 1.500)/2)2, por último para obtener el valor volumen acumulado realizarían tratamientos en el registro numérico ((1.200 + 1.500)/2)2 = 2.700 litros. Se hace énfasis en que algunas parejas deben reconfigurar en un rectángulo y un triángulo para encontrar la medida del trapecio, lo cual corresponde a un tratamiento en el registro figural.

Por otro lado, para dar solución al ítem b), los estudiantes realizarían la coordinación del volumen acumulado en los registros mostrados antes. Luego, para obtener la medida del volumen al cabo de cinco horas, se espera que las parejas realicen la conversión de la representación del registro gráfico al registro figural de modo similar al ítem a), con la única diferencia que ahora asociarían la medida del volumen acumulado con la medida de la superficie de un pentágono no regular, así como se puede observar en la Figura 58.

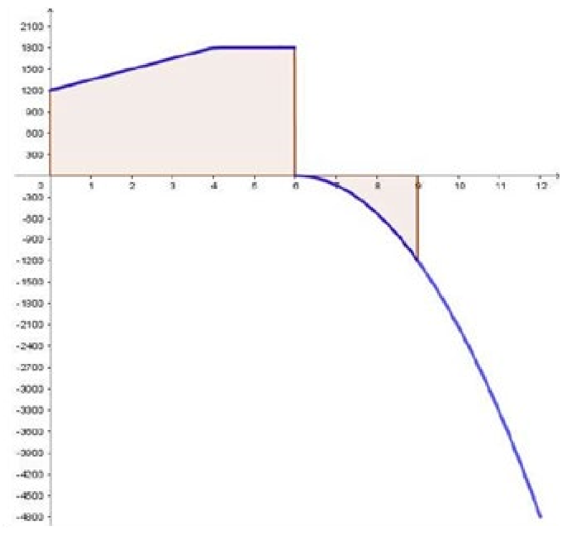
Figura 58
Acciones esperadas que realicen los estudiantes
para dar solución al ítem b) de la primera pregunta



Para encontrar la medida de la superficie del polígono mencionado, los estudiantes reconfigurarían la región sombreada, el pentágono, y después realizarían una conversión del registro algebraico al registro numérico con la cual el volumen acumulado al cabo de cinco horas es $\int_0^{5} V'(t)dt = ((1.200 + 1.800)/2)4 + 1.800\ (1)$, por último, para que obtengan el valor pedido deben realizar tratamientos en el registro numérico encontrando que el volumen asciende a 7.800 litros. Se puede suponer que los estudiantes podrían llegar a la solución de estos ítems debido a sus conocimientos previos de cálculo integral y de geometría.

Para solucionar el ítem c), los estudiantes deben realizar la coordinación de la representación del volumen acumulado. Luego, para obtener la medida del volumen al cabo de nueve horas, cuya representación gráfica se muestra en la Figura 59, las parejas deben realizar la conversión de esta representación gráfica a una representación algebraica $\int_0^{9} V'(t)dt$. Además, para calcular el valor de esa integral realizarán el siguiente tratamiento, $\int_0^{9} V'(t)dt = \int_0^{6} V'(t)dt + \int_6^{9} V'(t)dt$, en el registro algebraico. Esto se da, gracias a los conocimientos previos que tienen los estudiantes de integrales definidas.

Figura 59
Representación gráfica del volumen acumulado al cabo de nueve horas

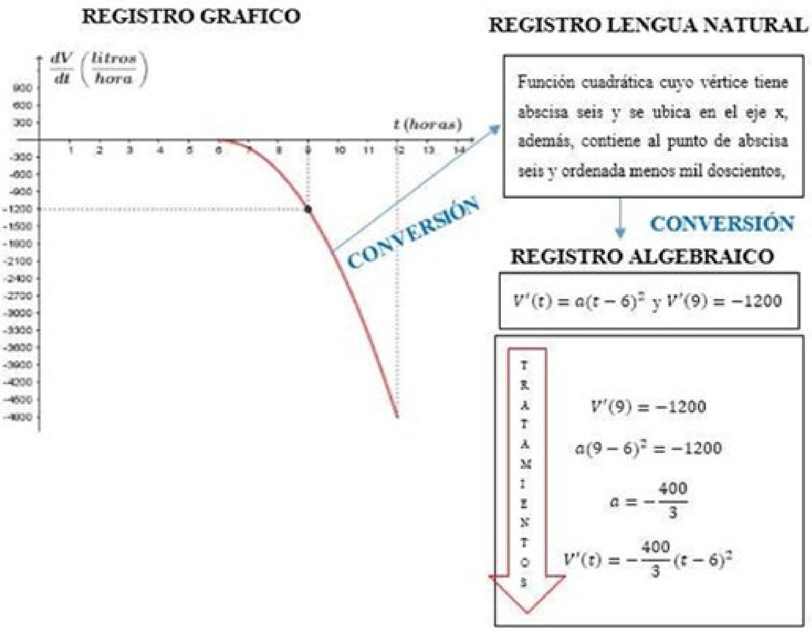


Para encontrar la medida del volumen acumulado durante las primeras seis horas, los estudiantes procederán de modo similar que en los ítems a) y b), es decir, que realizarán la conversión de la representación del registro gráfico al figural, asociando la medida del volumen acumulado con la superficie de un pentágono irregular; luego, para hallar la medida de la superficie, reconfigurarán el pentágono en un trapecio y un rectángulo, tratamiento en el registro figural; luego, realizarán una conversión de esta última representación al registro numérico planteando que el volumen acumulado en el tanque de pasteurización al cabo de seis horas de iniciado el proceso es ((1.200 + 1.800)/2) 4 + 1.800 (2); por último, para obtener el valor de este volumen, realizarán tratamientos en el registro numérico encontrando que este volumen asciende a 9.600 litros.

Por otro lado, para obtener el valor de la integral $\int_6^{9} V'(t)dt$, la cual corresponde al volumen acumulado durante las siguientes tres horas, los estudiantes sienten la necesidad de utilizar el GeoGebra debido a que no tienen los conocimientos previos para calcular dicho volumen. En esta etapa de la actividad se evidencia la aplicación de la variable didáctica *comportamiento que tiene la función razón de cambio.*

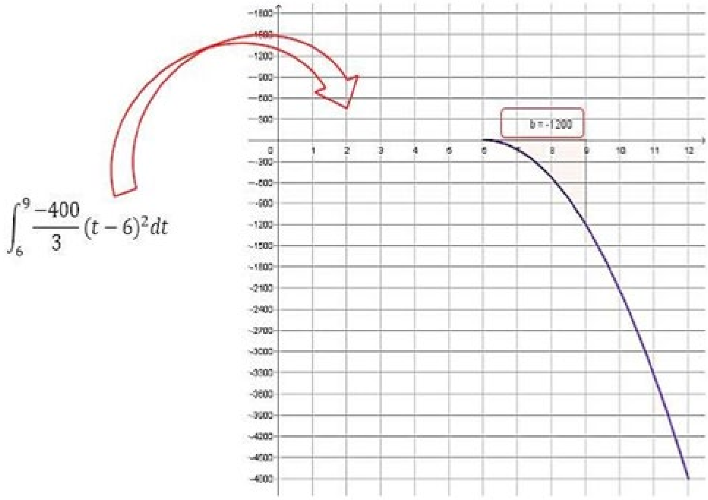
Posterior a esto, para obtener el volumen acumulado entre la sexta y novena hora, los estudiantes emplearán el comando *Integral* del software GeoGebra, debido a que cuentan con una computadora a su disposición además de sus conocimientos de este software, previamente deberán encontrar la representación algebraica de la función que modela la razón de cambio del volumen acumulado durante el intervalo de tiempo analizado. Para que los estudiantes obtengan esta representación algebraica deberán realizar la conversión de la representación gráfica mostrada en el enunciado al registro de lengua natural, para luego realizar la conversión de esta última al registro algebraico, realizando antes tratamientos en este último registro, tal como se puede visualizar en la Figura 60.

Figura 60
Conversiones y tratamientos para que los estudiantes obtengan la representación algebraica de la función que modela la razón de cambio



Con la representación obtenida en el registro algebraico los estudiantes utilizarían el comando *Integral* del GeoGebra para obtener el volumen acumulado en el tanque en el intervalo de tiempo comprendido desde la sexta hasta la novena hora, para ello realizarían la conversión de la representación de la medida del volumen acumulado en el registro algebraico al registro gráfico CAS, tal como se muestra en la Figura 61.

Figura 61
Conversión de la representación algebraica del volumen acumulado hacia una representación en el registro gráfico CAS



Luego, con el apoyo del GeoGebra, los estudiantes obtendrán el valor de la integral definida que asciende a −1.200. Por último, realizarán tratamientos en el registro numérico al igual que en los ítems a) y b) obteniendo que el valor del volumen acumulado de la mezcla en el tanque durante las nueve primeras horas asciende a 8.400 litros.

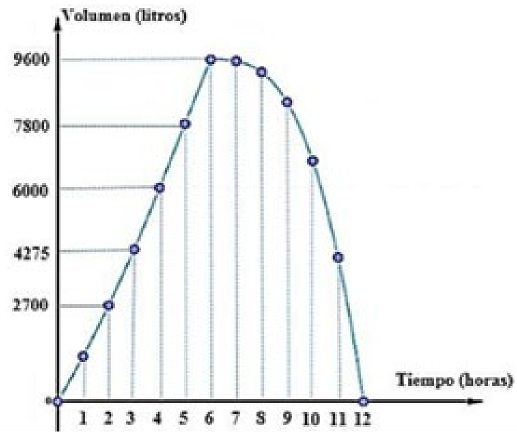
Al final, para dar solución al ítem d) se espera que los estudiantes realicen las mismas transformaciones, conversiones y tratamientos, para obtener el volumen acumulado durante las primeras 12 horas, es decir ʃ_0^(12) *V′*(*t*)*dt* = ʃ_0^(6) *V′* (*t*)*dt* + ʃ_6^12 *V′*(*t*)*dt*, obteniendo los siguientes valores ʃ_0^(6) *V′* (*t*)*dt* = 9.600 y ʃ_6^(12) *V′* (t)*dt* = -9.600, este último con el uso del comando *Integral*; obteniendo así que la medida del volumen acumulado al cabo de 12 horas asciende a cero litros.

– *Pregunta 2*

Para realizar la representación gráfica solicitada en la pregunta, los estudiantes con la ayuda del GeoGebra pueden obtener los valores del volumen en intervalos de una hora, esto es para t = 0, 1, 2… 12. Luego, se espera que los valores sean organizados en una tabla y con ello realizar el esbozo pedido, tal como se visualiza en la Figura 62.

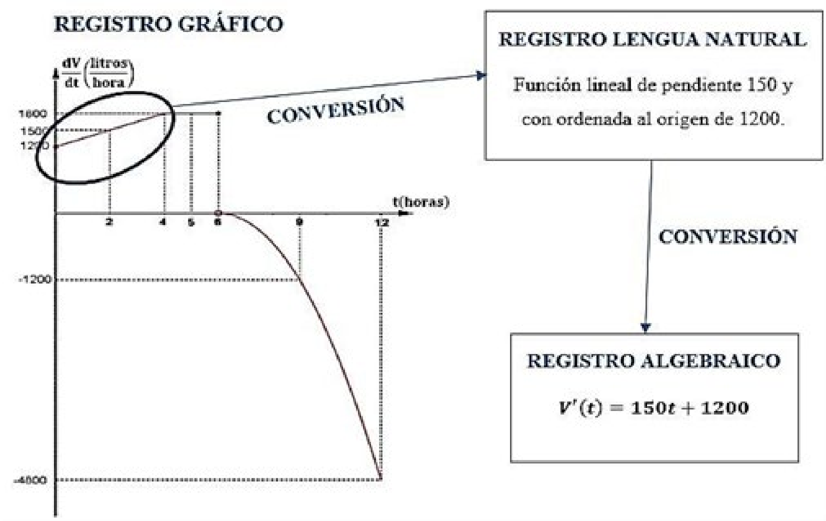
Figura 62
Representación del volumen en el registro gráfico por medio de la tabla

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\int_0^t V'(t)dt$	0	1275	2700	4275	6000	7800	9600	9555,56	9244,44	8400	6755,56	4044,44	0



Para obtener los valores presentados en la tabla mostrada en la Figura 62, las parejas deben realizar la coordinación de la representación del volumen acumulado. Luego, para obtener la medida del volumen en las horas mencionadas deben emplear el comando *Integral*, para lo cual necesitan la representación algebraica de la función que modela la razón de cambio del volumen. A su vez, para obtener la razón de cambio del volumen en el registro algebraico, los estudiantes deben realizar las transformaciones a partir de la representación gráfica presente en el enunciado de la actividad 2, para efectuar una conversión hacia el registro en lengua natural, y luego realizar una conversión de esta representación al registro algebraico, tal como se puede observar en la Figura 63.

Figura 63
Conversiones realizadas a la representación de la razón de cambio del volumen en el registro gráfico hacia una representación en el registro algebraico



Para obtener las representaciones de las funciones que modelan la razón de cambio del volumen en el registro algebraico para horas mayores a cuatro, los estudiantes deben proceder de manera similar a lo mostrado en la Figura 63. Luego, la representación de la función que modela la razón de cambio del volumen es:

$$V'(t) = \begin{cases} 150t + 1.200, & 0 < t < 4 \\ 1.800, & 4 \leq t \leq 6 \\ -\dfrac{400}{3}(t-6)^2, & 6 < t \leq 12 \end{cases}$$

Más adelante, con la representación obtenida los estudiantes emplearán el comando *Integral* del GeoGebra y con ello obtener los valores organizados en la tabla presentada en la Figura 63.

– *Pregunta 3*

A priori, en esta pregunta, los estudiantes al abrir el archivo *MODELO_APROXIMADO.ggb* presente en la computadora que tienen a su disposición, reconocerán que la representación, en el registro gráfico CAS, modela el posible comportamiento del volumen acumulado de la mezcla de zumo de mango en el tanque de pasteurizado a medida que transcurren las horas debido a que se asemeja a la representación realizada en la pregunta 2. En este sentido, se considera que los estudiantes puedan entender esta pregunta, debido a que la representación gráfica mostrada en el archivo modela de forma correcta el comportamiento del volumen acumulado, lo cual les permitirá relacionarla con el esbozo realizado en la pregunta anterior.

Una vez establecida la relación entre la representación mostrada en el archivo, registro CAS, con la representación gráfica de la función que modela el volumen acumulado, a medida que transcurren las horas, las parejas sólo deberán encontrar la manera de justificar la validez de la conjetura realizada. Luego de intercambiar ideas y de reflexionar sobre ellas, los integrantes de las parejas optarían por encontrar la representación algebraica de la función que modela el volumen $V\ (t)$, para luego derivarla y así obtener la razón de cambio $V'\ (t)$, en el registro algebraico, y con esto poder comparar esta representación con la representación algebraica obtenida en la segunda pregunta y así discernir sobre la validez del modelo presentado por el departamento de producción.

De esta manera, los estudiantes deben inferir que este procedimiento no se podrá llevar a cabo debido a que no cuentan con la información necesaria para realizar la conversión de la representación gráfica, en el registro CAS, mostrada hacia una representación en el registro algebraico debido a que no se establecen los comportamientos (lineal, cuadrático, etc.) de las funciones que modelan el volumen. Es por ello que se muestra la acción de la variable *didáctica comportamiento de la función de manera explícita en la representación gráfica presentada en el archivo MODELO_APROXIMADO.ggb*, además, se muestra el valor que adquiere la variable didáctica en este momento, el cual es *implícito*, debido a que no se puede precisar el comportamiento que presenta la función que modela el volumen.

Así mismo, se muestra la acción de la otra variable didáctica, *vista algebraica en el GeoGebra*, la cual adquiere el valor de *oculta*. Se señala la presencia de esta variable didáctica debido a que, si no estuviese oculta, los estudiantes con sus conocimientos del software podrían obtener la representación algebraica correspondiente a la representación gráfica mostrada en el archivo y con ella simplemente realizarían el proceso de derivación, y con la representación obtenida solo bastará compararla con la encontrada en la segunda pregunta de la actividad.

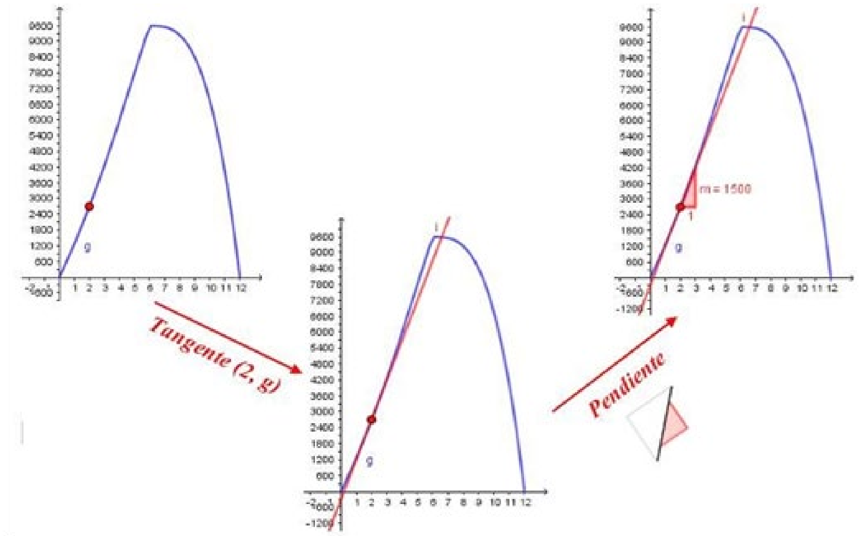
Debido a que los estudiantes no podrán obtener la representación algebraica de la función que modela el volumen acumulado, se espera que el criterio a seguir por las parejas sea obtener derivada, la razón de cambio, de la representación del volumen acumulado en el registro CAS de manera gráfica, para lo cual movilizarán sus conocimientos previos sobre derivadas, por ejemplo, la derivada de una función en un punto dado coincide con la pendiente de la recta tangente en ese punto.

Con lo mencionado en el segundo criterio, los estudiantes deben obtener el valor de la razón de cambio en puntos donde se conoce el valor de dicha razón, por ejemplo, en la segunda, cuarta, quinta, sexta, novena y última hora. Para llevar a cabo estas acciones, en el registro gráfico CAS, las parejas usarán el comando *Tangente (<Punto>, <Función>)*, el cual graficaría la representación de la recta tangente sobre la representación gráfica de la función, que modela el volumen, en el registro gráfico CAS a una hora determinada.

Una vez obtenida la representación gráfica de la recta tangente a una determinada hora, en el registro CAS, los estudiantes deben emplear el comando pendiente[105] de la barra de herramientas para obtener el valor de la pendiente a la representación de la recta tangente y con esto encontrar el valor de la razón de cambio en la hora considerada. En la Figura 64 se mostrarán las acciones que deberían realizar los estudiantes en el segundo criterio cuando el valor de t es 2.

105 

Figura 64
Acciones esperadas a realizar por los estudiantes para obtener la razón de cambio en el registro gráfico CAS



Se puede observar en la Figura 64 el uso del GeoGebra para realizar ciertas acciones en el registro gráfico CAS, en donde el software permite obtener ciertos resultados de manera inmediata por lo que el GeoGebra se convierte en una herramienta que acelera los cálculos, además de permitir la formación de conjeturas en los estudiantes. Luego de obtener los valores de las razones de cambio en el registro gráfico CAS, los estudiantes compararían estos valores con los presentados inicialmente, con los cuales concluirían que la representación gráfica de la función que modela el volumen acumulado presentado por el departamento de producción, representa en realidad el comportamiento del volumen acumulado en el tanque de pasteurizado. Al finalizar esta pregunta, se espera que los estudiantes puedan ir formando conjeturas relacionadas a la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo, es decir, que puedan percibir la siguiente relación:

$$d/dt \int_0^{t} V'(T)\,dT = V'(t)$$

La cual muestra que los procesos de derivación e integración son inversos, además, de percibir que dicha relación no se establece en la sexta hora, instante en que la función $V'\ (t)$ no es continua. Con esto último, los estudiantes pueden lograr realizar conjeturas relacionadas con las condiciones que debe cumplir la función integrando para poder utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo.

– *Pregunta 4*

Con respecto a esta pregunta, las parejas pueden identificar la condición inicial planteada en el enunciado, el tanque contiene un volumen de 1.300 litros de agua que permitirá disolver la mezcla, luego de realizar la lectura correspondiente del mismo, así como discutir las ideas que se presentan en el texto.

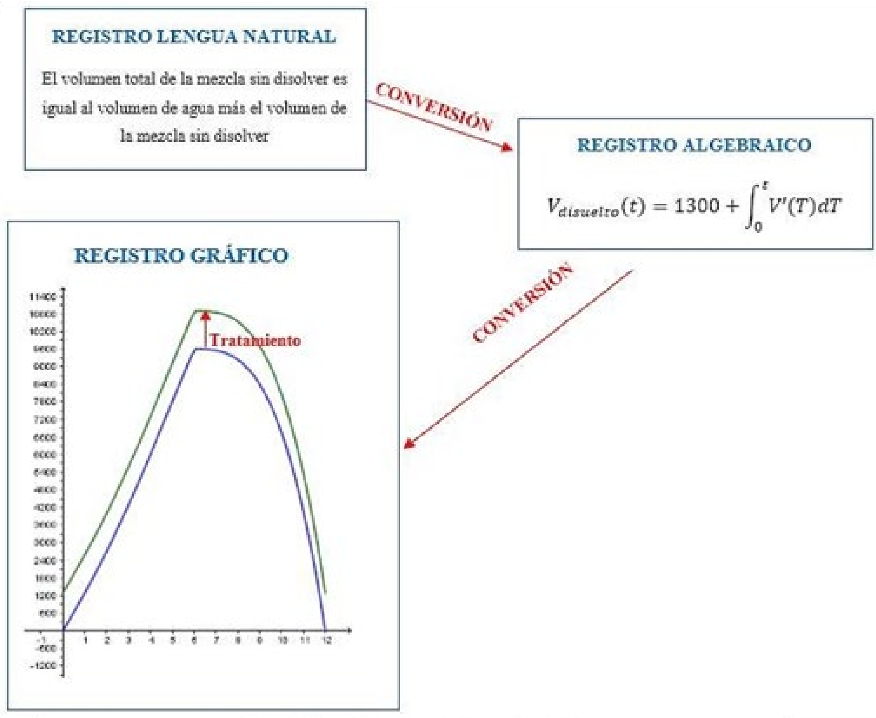
Luego, los estudiantes pueden representar en lengua natural el volumen disuelto en el tanque de pasteurizado, señalando ahora que "el volumen disuelto es igual al volumen inicial más el volumen de la mezcla sin disolver", luego pueden realizar una conversión de esta representación a una representación algebraica, es decir, que logren plantear:

$$V_{disuelto}\ (t) = 1.300 + \ V_{\sin disolver}\ (t)$$
$$V_{disuelto}\ (t) = 1.300 + \int_0^t V'(T)dT$$

Luego de realizar esta representación, pueden realizar una conversión de esta última representación al registro gráfico, realizando una traslación la cual corresponde a una modificación posicional según Vigo Ingar[106], tratamiento en el registro gráfico, a la representación obtenida en la pregunta 2. Estas acciones, conversiones y tratamientos se visualizan en la Figura 65.

106 Vigo Ingar. "A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais", cit.

Figura 65
Conversiones y tratamientos que realizarían los estudiantes al resolver la pregunta 4



Se debe mencionar que las parejas también podrían utilizar la representación gráfica en el registro CAS planteada en la pregunta 3 para resolver la pregunta, puesto que esta modela el volumen acumulado a medida que transcurren las horas. A su vez, que los estudiantes realicen la conversión del registro en legua natural hacia una representación algebraica al igual que lo señalado antes, para luego realizar una conversión hacia una representación en el registro CAS empleando la sentencia 1.300 + g, donde g representa el volumen acumulado sin disolver.

Al finalizar esta pregunta, los estudiantes pueden ir formando conjeturas relacionadas a la segunda parte del TFC, es decir, que puedan percibir la siguiente relación:

$$\int_0^{t} V'(T)dT = V(t) - V(0)$$

A partir de la siguiente relación:

$$V_{disuelto}\,(t) = 1.300 + \int_0^t V'(T)dT$$
$$V_{disuelto}\,(t) = V\,(0) + \int_0^t V'(T)dT$$
$$\int_0^t V'(T)dT = V_{disuelto}\,(t) - V\,(0)$$

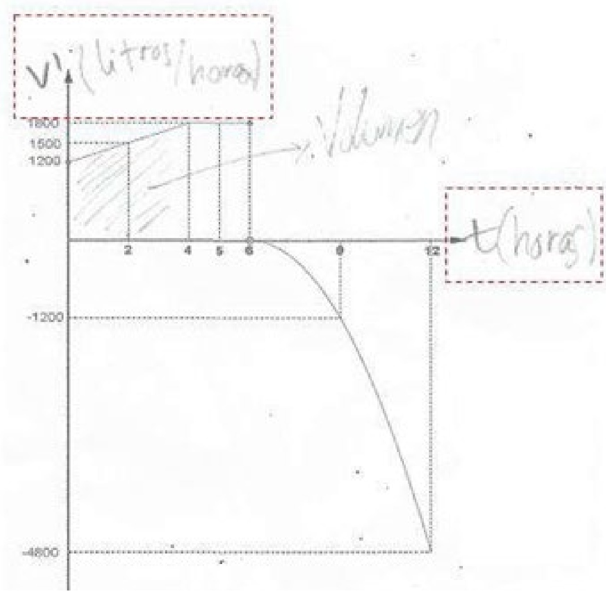
Esta última relación muestra la manera de calcular una integral definida a partir de una primitiva o antiderivada, $V'\,(t)$, lo cual es la esencia del Teorema Fundamental del Cálculo.

3) Análisis *a posteriori*

– *Pareja 1*

Esta actividad se realizó en una sala de computación donde los estudiantes contaron con el acceso a una computadora. Al iniciar la actividad, la pareja leyó el enunciado que se planteó, luego intercambiaron ideas con la finalidad de obtener conclusiones. Entre las cuales identificaron las variables presentes en problema como el tiempo y la razón de cambio del volumen las cuales fueron representadas en el registro algebraico como t y V', además, representaron el área bajo la curva como el volumen acumulado de la mezcla. Las acciones mencionadas se pueden observar en la Figura 66.

Figura 66
Representaciones en el registro algebraico de las variables involucradas en el enunciado



– *Pregunta 1*

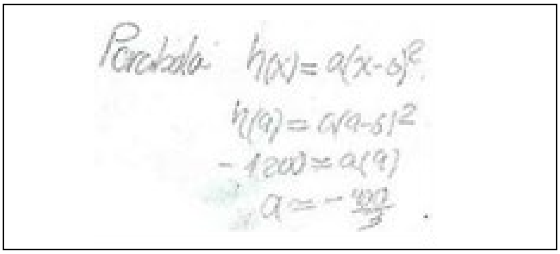
Para calcular la medida del volumen acumulado, en el tanque de pasteurizado, en las horas pedidas en los ítems a), b), c) y d) los estudiantes realizaron la conversión de la representación de la función que modela la razón de cambio en el registro gráfico, presentada en el enunciado de la actividad, hacia una representación en el registro algebraico, el cual se muestra en la Figura 67, con el propósito de obtener la representación de dicha función en el registro gráfico CAS.

Figura 67
Representación algebraica de la razón de cambio del volumen

$$p(x) = \begin{cases} 150x + 1200 \\ 1800 \\ -(x-6)^2 \cdot \dfrac{400}{3} \end{cases}$$

En la Figura 67 se visualiza la representación algebraica mostrada en la vista algebraica del GeoGebra; mencionando que los estudiantes no realizaron dicha representación en la ficha de actividades, a excepción de la representación algebraica de la función cuadrática, cuya representación se muestra en la Figura 68.

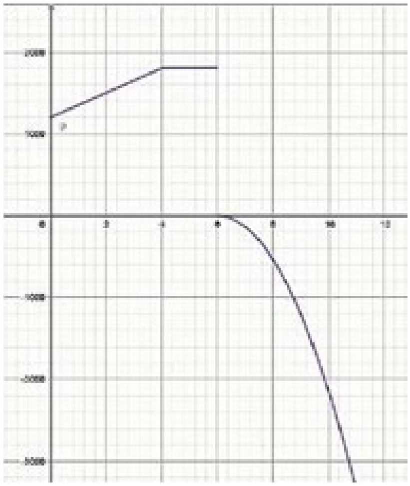
Figura 68
Representación algebraica de la función que modela la razón de cambio del volumen a partir de la sexta hora



La Figura 68 muestra las acciones, tratamientos, realizados por la pareja para obtener la representación $h\,(x) = (-400)/3\;(x - 6)^2$ en el registro algebraico, con respecto a las representaciones algebraicas de las otras funciones, lineal y la constante, que fueron obtenidas de manera directa por los estudiantes, manifestándose cuando los estudiantes ingresan dichas representaciones en la barra de entrada.

Con el producto realizado por los estudiantes se determina que lograron realizar la coordinación de la representación razón de cambio en los registros gráfico, lengua natural, algebraico y gráfico CAS como se había supuesto de manera *a priori*. A continuación, se muestra la representación de la razón de cambio, en el registro gráfico CAS, realizado por los estudiantes en la Figura 69.

Figura 69
Representación gráfica en el registro gráfico CAS



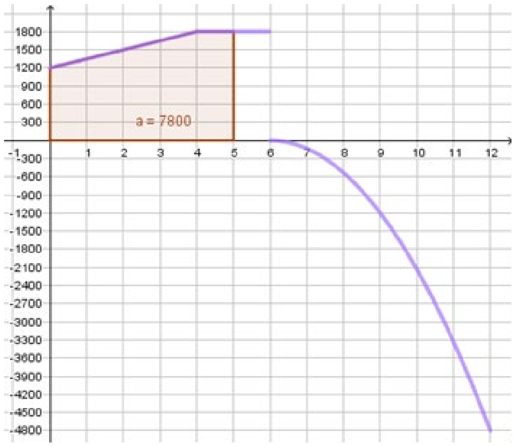
Por otro lado, para realizar esta representación, los estudiantes emplearon el comando *Si (<Condición>, <Entonces>, <Si no>)* del GeoGebra ingresando la sentencia mostrada en la Figura 70.

Figura 70
Sintaxis para representar la función
que modela la razón de cambio en el registro gráfico CAS

Entrada: Si(0 < x < 4, 1200 + 150x, Si(4 < x < 6, 1800, Si(6 < x < 12, -400 / 3 (x - 6) ^2)))

Se concluye, entonces, que los estudiantes que conforman la primera pareja tienen conocimientos de los comandos del GeoGebra, como se había supuesto en el análisis *a priori*. Luego, para obtener la medida de los volúmenes en las horas solicitadas en la primera pregunta, la pareja empleó el comando *Integral* del GeoGebra. Lo cual no se consideró en el análisis *a priori*, puesto que se pensó que utilizarían el software sólo para dar solución a los dos últimos ítems debido a que no podrían resolverlos por no contar con los conocimientos necesarios. A continuación, en la Figura 71 se muestra el resultado de la ejecución del comando *Integral* con el que obtuvieron la medida del volumen acumulado, en el tanque de pasteurizado, en la quinta hora.

Figura 71
Representación del volumen acumulado para dar solución al ítem b)

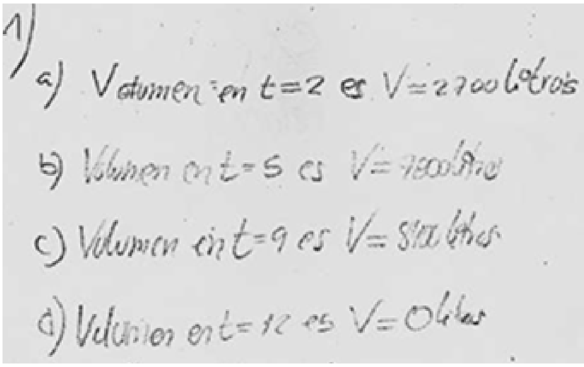


La Figura 71 muestra la representación gráfica del volumen acumulado, en el registro gráfico CAS, luego de cinco horas de iniciado el proceso de pasteurizado. Además, en dicha representación también se puede observar la medida de dicho volumen y, para llevarlo a cabo, los estudiantes emplearon el comando *Integral* del GeoGebra el cual se muestra en la Figura 72.

Figura 72
Representación de la sintaxis del comando integral

En la Figura 73 se observan las respuestas obtenidas por la pareja en cada uno de los ítems.

Figura 73
El volumen acumulado en las horas pedidas en la primera pregunta


1)
a) Volumen en t=2 es V=2700 litros
b) Volumen en t=5 es V=[illegible] litros
c) Volumen en t=9 es V=[illegible] litros
d) Volumen en t=12 es V=0 litros

En la Figura 73 se visualiza que la pareja logró resolver la pregunta tal como se había supuesto en el análisis *a priori*, movilizando sus conocimientos previos de integrales definidas y de algunos comandos del GeoGebra. Lo obtenido por los estudiantes muestra que lograron realizar las conversiones de la representación de la función razón de cambio del registro gráfico hacia una en el registro de lengua natural, para luego realizar una conversión de esta última representación a una en el registro gráfico CAS. También, se puede observar que esta pareja logró representar el volumen acumulado en los registros lengua natural, gráfico CAS sin pasar por el registro numérico y figural.

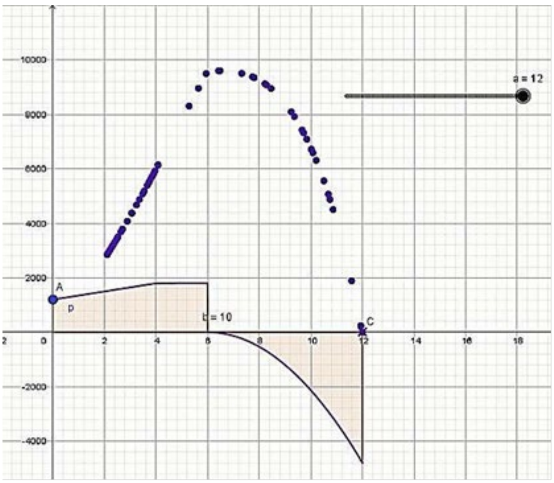
Esto evidencia que los estudiantes realizaron la coordinación de la representación, del volumen acumulado en los registros gráfico, lengua natural, gráfico CAS, de manera similar, con el objeto matemático función razón de cambio. Con esto, se determina que los estudiantes alcanzaron la comprensión de los objetos matemáticos función razón de cambio e integral definida debido a que realizaron la coordinación de una representación en al menos dos registros como lo afirma DUVAL[107].

107 DUVAL. *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo…*, cit.

– *Pregunta 2*

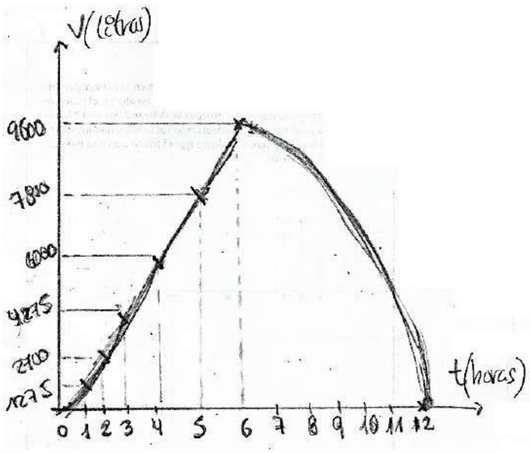
Para realizar el esbozo de la representación gráfica del volumen acumulado a medida que transcurren las horas, la dupla calculó la medida del volumen acumulado en distintas horas; ellos utilizaron el mismo procedimiento que en la primera pregunta con la única diferencia de que calcularon la medida del volumen para una mayor cantidad de horas y, para ello, emplearon un deslizador que fue denominado como a y representa al límite superior de la integral; este controla el valor de las horas, empezando en cero y terminando en 12 con incrementos de 0,02 horas. En la Figura 74 se presenta el producto realizado por los estudiantes.

Figura 74
Representación gráfica en el registro gráfico CAS



Es importante acotar que, para representar gráficamente los puntos en el registro gráfico CAS mostrados en la Figura 74, los estudiantes realizaron la conversión de la representación algebraica (a, b) hacia la representación gráfica mencionada, donde b representa el valor de la *integral (p, 0, a)* siendo p la representación algebraica de la función que modela la razón de cambio. Luego, para que se representen todos los puntos al manipular el deslizador, los estudiantes activaron la herramienta *Rastro* del GeoGebra obteniendo la representación gráfica deseada. Posterior a esto, los estudiantes realizaron el esbozo de la función que modela el comportamiento del volumen acumulado a medida que transcurren las horas en el registro gráfico, a lápiz y papel, tal como se muestra en la Figura 75.

Figura 75
Representación gráfica de la función que modela el volumen acumulado a medida que transcurren las horas



La Figura 75 muestra el esbozo realizado por los estudiantes, con lo cual se resuelve de manera satisfactoria la segunda pregunta de la actividad tal como se había supuesto en el análisis *a priori*, sin embargo, se consideró el uso de una tabla donde se organizaban las medidas del volumen en diferentes horas, algo que no realizaron los estudiantes, que no resultó ser impedimento para realizar el esbozo debido a que los valores mencionados estaban a su alcance, gracias al GeoGebra.

También, en el análisis *a priori* realizado no se consideró el uso de las herramientas deslizador y rastro del software lo cual fue de gran ayuda para realizar un esbozo aproximado de la función que modela el volumen acumulado a medida que transcurren las horas. Luego, al manipular el deslizador que está realizando tratamientos en el registro grafico CAS, tal como lo afirma VIGO INGAR[108], ésta se da cuando los estudiantes realizan la traslación de la representación gráfica de la recta

108 VIGO INGAR. "A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais", cit.

vertical que representa el límite derecho de la región sombreada, que viene a ser el volumen acumulado en el tanque de pasteurizado.

– *Pregunta 3*

Para verificar que el modelo presentado por el departamento de producción modela el comportamiento del volumen acumulado a medida que transcurren las horas, los estudiantes intercambiaron y discutieron ideas con la intención de encontrar un camino que los guíe a la solución de la pregunta, obteniendo así un criterio que les permita justificar que la representación gráfica, mostrada en el archivo *MODELO_APROXIMADO.ggb*, modela el comportamiento del volumen a medida que transcurren las horas.

El criterio planteado por la pareja consiste en obtener la derivada de la función presentada en el archivo, para ello deben obtener la representación algebraica de esta para luego derivarla y compararla con la representación algebraica obtenida en la pregunta 1, logrando así cumplir los requerimientos señalados. Este criterio se muestra cuando la pareja realiza el siguiente comentario "derivamos la función que está en el archivo y la comparamos con la que dan al inicio".

Así mismo, los estudiantes buscaron un criterio que les permitiese justificar que la representación gráfica en el registro gráfico CAS mostrada en el archivo modela la razón de cambio del volumen acumulado en el tanque de pasteurizado debido a que esta tiene mucha similitud a la representación gráfica realizada en la segunda pregunta. Para llevar a cabo la acción planteada, la estudiante CAMILA comenta: "para obtener la ecuación de la función que modela el volumen habilitemos la vista algebraica del GeoGebra" con la cual los estudiantes encuentran la representación algebraica de dicha función, la misma se visualiza en la Figura 76.

Figura 76
Representación algebraica de la función presentada por el departamento de producción con el uso del GeoGebra

$$g(x) = \begin{cases} 1200\,x + 75\,x^2 & : 0 < x < 4 \\ 1800\,x - 1200 & : (4 < x < 6) \wedge (\neg(0 < x < 4)) \\ 9600 - \frac{400}{9}\,(x-6)^3 & : (6 < x < 12) \wedge ((\neg(0 < x < 4)) \wedge (\neg(4 < x < 6))) \end{cases}$$

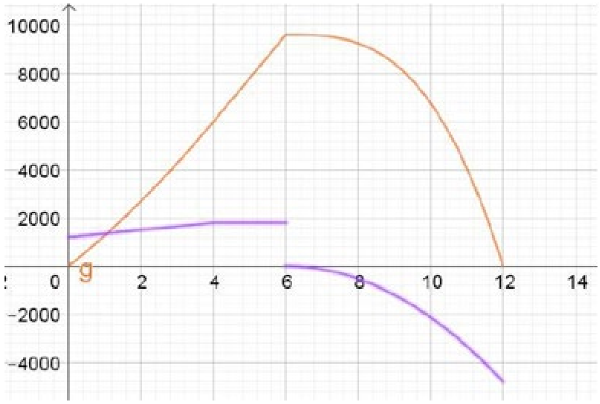
En la Figura 76 se observa la representación algebraica de la función que modela la función presentada por el departamento de producción, ahora los estudiantes emplean el comando *Derivada* cuya sintaxis es *Derivada (función)*, obteniendo la representación algebraica de la derivada de la función presentada por el departamento de producción, la cual se muestra en la Figura 77.

Figura 77
Representación algebraica de la derivada de la función presentada por el departamento de producción con el uso del GeoGebra

$$g'(x) = \begin{cases} 1200 + 150\,x & : 0 < x < 4 \\ 1800 & : (4 < x < 6) \wedge (\neg(0 < x < 4)) \\ -\frac{400}{3}\,(x-6)^2 & : (6 < x < 12) \wedge ((\neg(0 < x < 4)) \wedge (\neg(4 < x < 6))) \end{cases}$$

Cuando los estudiantes obtuvieron la representación mostrada en la Figura 77, procedieron a comparar esta representación con la representación que obtuvieron en la primera pregunta, logrando concluir que la representación gráfica mostrada en el archivo *MODELO_APROXIMADO.ggb*, cumple los requerimientos solicitados por el ingeniero. Esta conclusión la realizaron luego de comparar dichas representaciones en el registro gráfico, presentado en el enunciado, y en el registro grafico CAS, la cual se obtuvo en el GeoGebra. De esta manera, se muestra en la Figura 78 la representación gráfica de la derivada de la función presentada en el archivo *MODELO_APROXIMADO.ggb* en el registro CAS.

Figura 78
Representación gráfica de la derivada de la función presentada por el departamento de producción en el registro gráfico CAS



La pregunta 3 llegó a ser resuelta por los estudiantes obteniendo la representación algebraica y gráfica, en el registro CAS, de la derivada de la función presentada en el archivo, las cuales fueron comparadas con la representación algebraica de la función razón de cambio obtenida en la primera pregunta y con la representación gráfica, mostrada en el enunciado. El modo seguido por los estudiantes corresponde al segundo criterio que se había supuesto en el análisis *a priori*.

Se debe mencionar que la pareja no pensó en el primer criterio considerado por nosotros. Al no poder identificar el tipo de funciones que se presentaban en el archivo, *MODELO_APROXIMADO.ggb*, la pareja optó por activar la vista algebraica con la finalidad de obtener la representación algebraica de la función presentada por el departamento de producción y con ella obtener la derivada de la misma, la cual les permitió dar la solución al ejercicio. Este procedimiento se pudo realizar debido a los conocimientos que poseen del GeoGebra.

Así mismo, los estudiantes realizaron conjeturas las cuales se formaron al resolver la pregunta 3, entre ellas se resalta lo comentado por la estudiante Camila "la integral de la derivada es el volumen", el cual es la esencia del Teorema Fundamental del Cálculo. El comentario realizado por la estudiante muestra una característica de experimentación con una situación problema, la intención de enseñar no está implícita, pero fue diseñada con el objetivo de poner en juego el objeto matemático de estudio que se desea explorar[109].

– *Pregunta 4*

Luego de leer de manera detenida la pregunta, los estudiantes establecieron lo siguiente, "para encontrar el volumen disuelto hay que sumarle a la mezcla inicial los 1.300 litros de agua porque el tanque al inicio no está vació", lo cual muestra que para obtener el volumen disuelto de la mezcla se deben considerar los 1.300 litros de agua que había inicialmente.

Luego, para dar solución a esta pregunta los estudiantes realizaron la conversión de la representación obtenida en el registro lengua natural a una representación algebraica la cual se observa en la Figura 79.

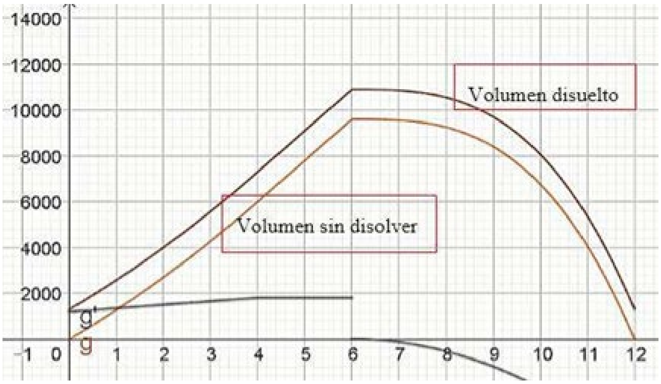
Figura 79
Representación algebraica del volumen disuelto

Entrada: h(x)=g(x)+1300

A su vez, con esta representación obtenida se realizó una conversión a una representación gráfica en el registro gráfico CAS, la cual se muestra en la Figura 80.

109 Almouloud. "Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos", cit.

Figura 80
Representación gráfica del volumen disuelto en el registro gráfico CAS



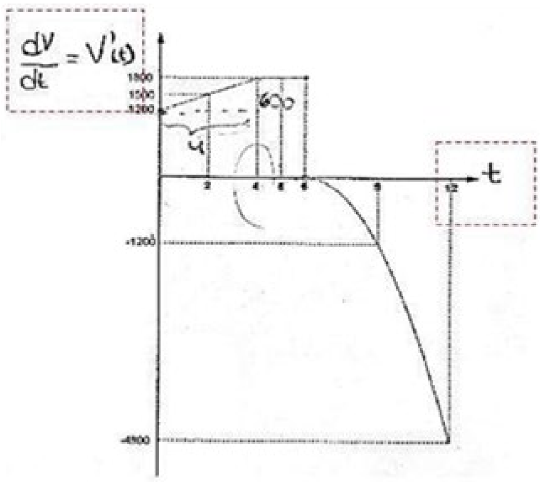
En la Figura 80 se muestra un tratamiento realizado en el registro gráfico CAS que corresponde a una traslación, la cual viene a ser una modificación posicional, así como lo afirma Vigo Ingar[110]. Las acciones realizadas por los estudiantes dan solución a esta pregunta, además estos procedimientos fueron los considerados en el análisis *a priori*.

– *Pareja 2*

Esta actividad se realizó en una sala de cómputo, cada pareja contaba con una computadora a su disposición. Al inicio de esta actividad las parejas leyeron el enunciado que se planteó, intercambiaron ideas, identificaron las variables presentes en problema como el tiempo y la razón de cambio del volumen las cuales fueron representadas en el registro algebraico como t y $V'(t)$, donde ésta última también fue representada por dV/dt, así como se observa en la Figura 81.

110 Vigo Ingar. "A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais", cit.

Figura 81
Representaciones en el registro algebraico de las variables involucradas en el enunciado



Con las acciones mostradas en la Figura 80, los estudiantes plantearon a partir de la representación gráfica que el área bajo la curva corresponde al volumen acumulado en el tanque de pasteurizado, lo cual se da cuando la pareja afirma "este problema es similar al anterior, solo cambia la forma de la gráfica".

– *Pregunta 1*

Para obtener la medida del volumen acumulado, en el tanque de pasteurizado, en los distintos tiempos los estudiantes realizaron la conversión de la representación de la razón de cambio del registro gráfico, mostrado en el enunciado, hacia una representación algebraica (tal como se visualiza en la Figura 82) con la intención de representar la función razón de cambio en el registro gráfico CAS.

Figura 82
Representación algebraica de la razón de cambio del volumen a medida que transcurren las horas

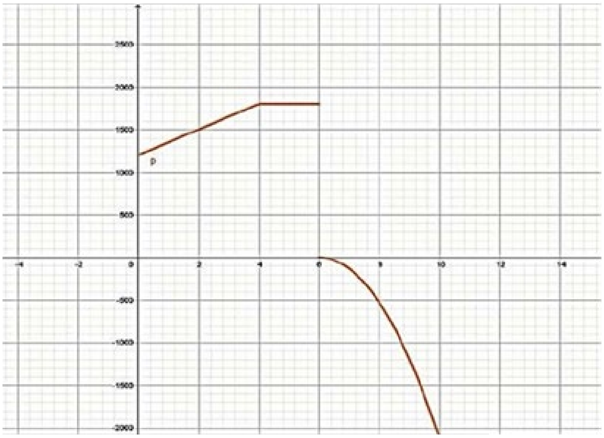
$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} 150x + 1200, & 0 \leq x \quad 4 \\ 0x + 1800, & 4 \leq x \leq 6 \\ -\frac{400}{3} \cdot (6-x)^2, & 6 < x \leq 12 \end{cases}$$

Para obtener la representación mostrada en la Figura 82, los estudiantes identificaron que la función que modela la razón de cambio corresponde a una función con dominio partido cuyos componentes son funciones lineales y una cuadrática. Esto se puede evidenciar cuando Joel afirma: "la función presentada es la composición de tres funciones, dos lineales y parábola". Si bien la función razón de cambio no es una composición de funciones, la intención de Joel fue transmitir que esta era la unión de tres funciones dos lineales y una cuadrática.

De esta manera, los estudiantes no presentaron ninguna dificultad al realizar la conversión de la representación de la función razón de cambio del registro gráfico al algebraico, previamente transitando por el registro en lengua natural, lo cual se evidencia cuando el estudiante Joel señala los tipos de funciones, lineal y cuadrática además de algunos elementos como la pendiente, el punto de paso para las lineales, el vértice de la función cuadrática y el punto de paso de esta función.

Con esto se puede determinar que los estudiantes realizaron la coordinación de la representación razón de cambio en los registros gráfico, lengua natural, algebraico y gráfico CAS como se había supuesto de manera *a priori*. A continuación, se muestra la representación de la razón de cambio en el registro gráfico CAS realizado por los estudiantes en la Figura 83.

Figura 83
Representación de la razón de cambio del volumen en el registro gráfico CAS



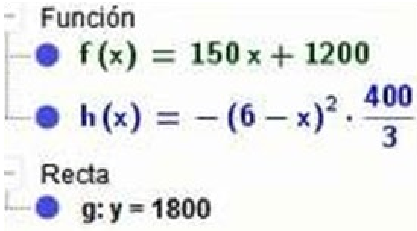
Para realizar esta representación, los estudiantes emplearon el comando *Si (<Condición>, <Entonces>, <Si no>)* del GeoGebra empleando la sintaxis en la Figura 84.

Figura 84
Sintaxis para representar la función que modela la razón de cambio en el registro gráfico CAS

`Entrada: si(0<=x<4,150x+1200,4<=x<=6,0x+1800,6<x<=12,h)`

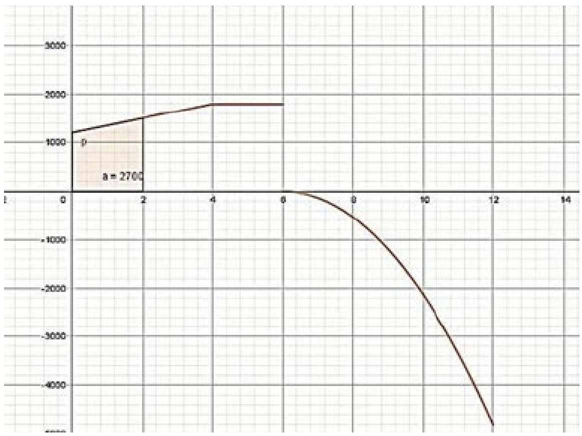
La función *h* por los estudiantes modela la razón de cambio durante la sexta y la décima segunda hora, ésta sigue un comportamiento cuadrático (como se visualiza en la Figura 85) y la función *p* representa la función que modela la razón de cambio en todo su dominio.

Figura 85
Representación algebraica de la función *h*, mediada con el GeoGebra



Se determina, entonces, que los estudiantes que conforman la pareja 2 tienen conocimientos de los comandos del GeoGebra tal como se había supuesto en el análisis *a priori*. Por otro lado, para obtener la medida de los volúmenes en las horas solicitadas, en cada ítem de la pregunta, los estudiantes utilizaron el comando *Integral* del GeoGebra, lo que no se había previsto en el análisis *a priori*, puesto que solo se consideró el empleo del software para resolver los ítems c) y d) debido a que no contaban con los conocimientos necesarios para realizar dicho procedimiento. Enseguida, se muestra en la Figura 86 el resultado de la ejecución del comando integral con el que obtuvieron la medida del volumen acumulado, en el tanque de pasteurizado, en la segunda hora.

Figura 86
Representación del volumen acumulado para dar solución al ítem a)

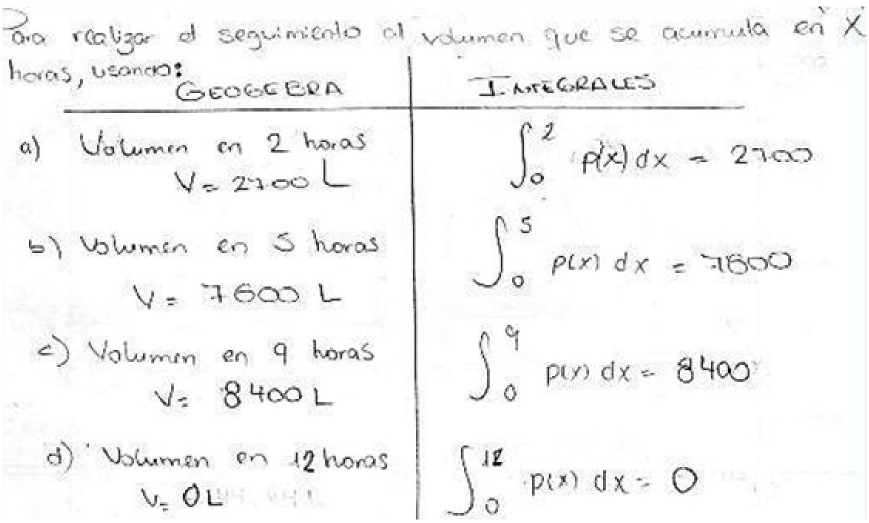


La Figura 86 muestra la representación gráfica del volumen acumulado, en el registro gráfico CAS, luego de dos horas de iniciado el proceso de pasteurizado. Además, en dicha representación también se observa la medida de dicho volumen, pero para llevar a cabo esta representación los estudiantes emplearon el comando *Integral* del GeoGebra como se visualiza en la Figura 87.

Figura 87
Representación de la sintaxis del comando integral

Así mismo, se presenta en la Figura 88 las respuestas obtenidas por los estudiantes al resolver la primera pregunta.

Figura 88
Medidas del volumen acumulado en las horas indicadas en la pregunta 1



En la Figura 88, se observa que esta pareja llegó a resolver la pregunta tal como se había supuesto en el análisis *a priori*, movilizando sus conocimientos previos de integrales definidas, así como su experiencia en el uso del GeoGebra. El producto realizado por los estudiantes evidencia que lograron realizar las conversiones de la representación de la función *razón de cambio* del registro gráfico al registro de lengua natural, seguido lograron hacia el registro algebraico para luego realizar una última conversión de esta representación hacia una en el registro grafico CAS. Además, la pareja logró representar el volumen en acumulado en los registros lengua natural, algebraico y gráfico CAS sin pasar por el registro numérico y figural, cosa que no se había supuesto en el análisis *a priori*. Esto es señal de que los estudiantes realizaron la coordinación de la representación del volumen acumulado en los registros mencionados pues no se encontró evidencia de que los estudiantes confundan a este objeto matemático, integral definida, con su representación; de modo similar con el objeto matemático función razón de cambio. Con esto se afirma que los estudiantes alcanzaron la comprensión de los objetos matemáticos función razón de cambio e integral definida.

– *Pregunta 2*

Para realizar la representación gráfica del volumen acumulado a medida que transcurren las horas, los estudiantes calcularon la medida del volumen acumulado en distintas horas; para llevar a cabo este fin, asignaron un deslizador al límite superior de la integral, el cual representa el valor de la hora transcurrida, empezando en cero y terminando en 12, siendo lo último el dominio de la función razón de cambio, con incrementos de una unidad. Este procedimiento se había supuesto en el análisis *a priori*, sin embargo, no se consideró el uso del deslizador evidenciando el conocimiento que tiene la pareja en GeoGebra. Se menciona, además, que cuando lo estudiantes manipulan el deslizador están realizando tratamientos en el registro grafico CAS, que son denominados por VIGO INGAR[111] como modificaciones posicionales; poniendo en contexto que esta modificación viene a ser la traslación de la recta, lo que representa el límite derecho de la región sombreada. Además, a medida que se manipula el deslizador se están realizando conversiones de la representación del volumen acumulado en el registro grafico CAS, hacia el registro gráfico, pasando por medio del registro CAS, el cual no está implícito, pero si se está movilizando.

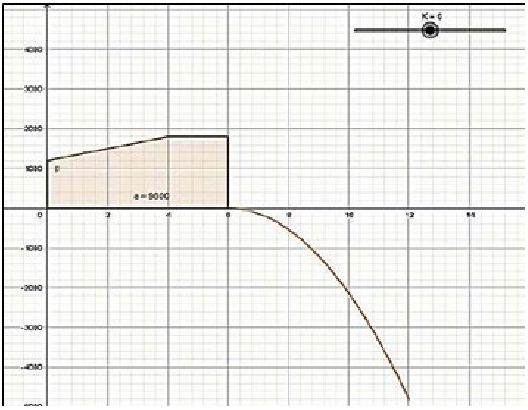
111 VIGO INGAR. “A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais”, cit.

En la Figura 89 se visualizan los tratamientos realizados por los estudiantes al obtener la medida del volumen en diferentes horas. La posición inicial de la representación gráfica del límite derecho de la región sombreada que representa el volumen acumulado a la sexta hora (k = 6) y la posición final de la representación gráfica del límite derecho de la región sombreada que representa el volumen acumulado a la octava hora (k = 8).

Figura 89
Tratamientos realizados en el registro CAS al dar solución a la pregunta 2

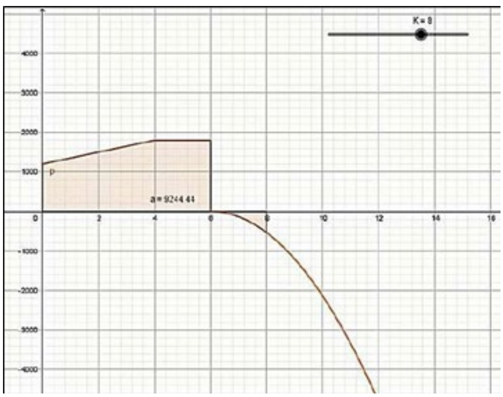
Representación del volumen acumulado, al cabo de seis horas de iniciado el proceso de pasteurización, en el registro CAS

El valor del deslizador es *k* = 6



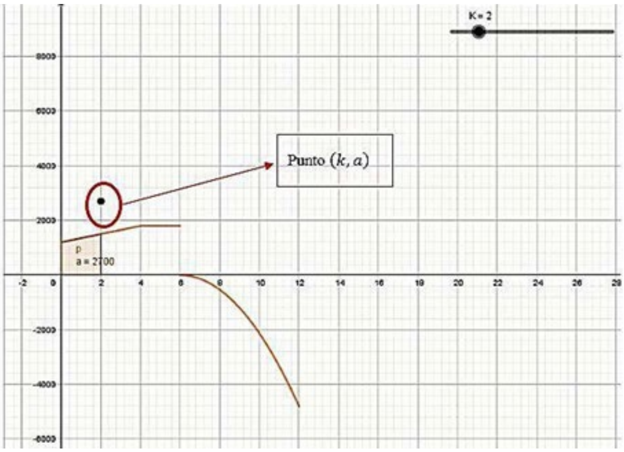
Representación del volumen acumulado, al cabo de ocho horas de iniciado el proceso de pasteurización, en el registro CAS

El valor del deslizador es *k* = 8



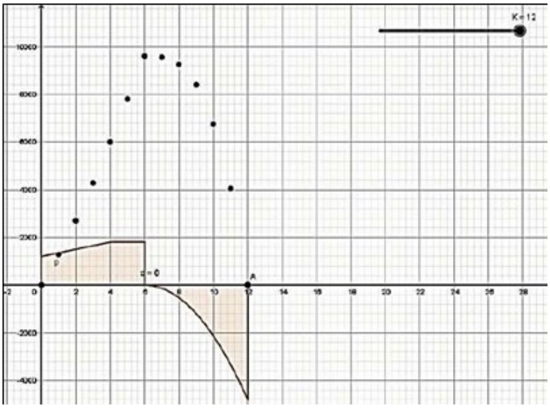
Luego, para realizar el esbozo de la función que modela el volumen acumulado, los estudiantes no organizan los valores del volumen en una tabla como se había supuesto en el análisis *a priori*. Al contrario, ellos emplean la herramienta *Rastro* del GeoGebra, para lo cual definen el punto $A = (k, a)$, cuya representación en el registro gráfico CAS se muestra en la Figura 90, cuando el valor de k es 2 y representa el valor del tiempo, caracterizado en el GeoGebra con el deslizador k y la letra a representa la medida del volumen acumulado cuyo valor se obtiene al ejecutar el comando *Integral* (p (x), 0, k).

Figura 90
Representación de un punto perteneciente a la representación gráfica del volumen acumulado en el registro gráfico CAS



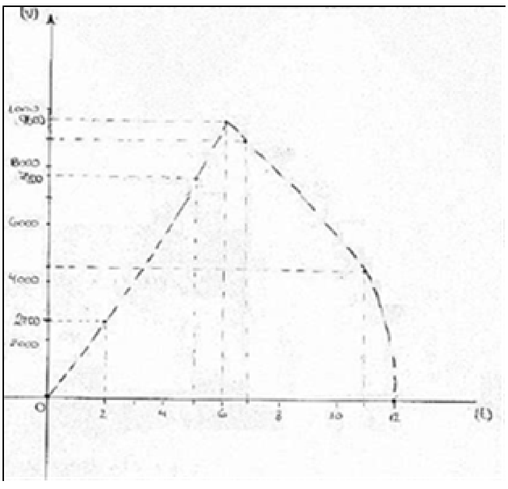
De esta manera, se observa en la Figura 91 la representación gráfica de los puntos en el registro gráfico CAS obtenidos al manipular el deslizador con la ayuda de la herramienta *Rastro*.

Figura 91
Representación gráfica de los puntos mediante el uso del deslizador y el rastro



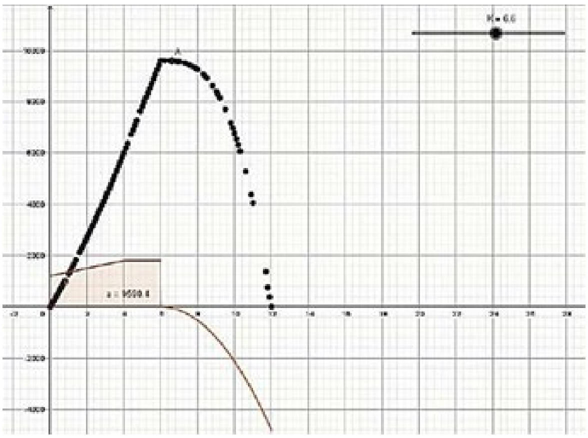
Luego, para obtener el esbozo de la representación gráfica de la función que modela el volumen acumulado a medida que transcurren las horas, los estudiantes representaron los puntos en el registro gráfico, a lápiz y papel, para luego unirlos tal como se muestra en la Figura 92.

Figura 92
Representación gráfica, realizada a lápiz y papel, de la función que modela el volumen acumulado a medida que transcurren las horas



El esbozo presentado en la Figura 92 fue construido por los estudiantes a partir de la representación gráfica en el registro gráfico CAS de los puntos obtenidos con la herramienta rastro con incremento mucho menor en el deslizador que el empleado con anterioridad, conforme se muestra en la Figura 93.

Figura 93
Representación gráfica de los puntos en el registro gráfico CAS considerando un menor incremento en el deslizador

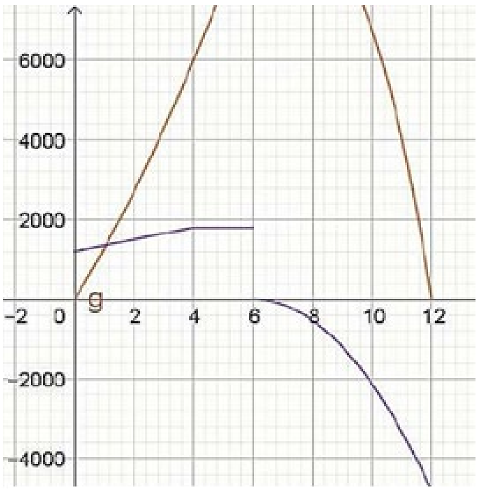


De esta manera, los estudiantes dieron solución a la pregunta 2, tal como se había previsto *a priori*, sin embargo, el dominio que tienen del GeoGebra les permitió obtener el valor del volumen acumulado para distintas horas; así como de no transitar por algunos registros, como el figural y el numérico, que no se había considerado en el análisis *a priori*. Además, el uso del rastro les permitió representar de manera gráfica la función volumen en los registros gráfico y gráfico CAS con mucha aproximación.

– *Pregunta 3*

Para comprobar que el modelo presentado por el departamento de producción modela el comportamiento del volumen acumulado a medida que transcurren las horas, los estudiantes intercambiaron y discutieron sus ideas, obteniendo un criterio para verificar que el modelo presentado en el archivo *MODELO_APROXIMADO.ggb* corresponde al volumen acumulado. El criterio que siguieron consistió en derivar la representación gráfica de la función, presentada en el archivo mencionado, que modela el volumen en el registro CAS, y el resultado de este proceso debe coincidir con la mostrada al inicio del enunciado. En palabras de los estudiantes, “derivemos a la función y lo que sale debe ser la gráfica que está en la hoja”. Para llevar a cabo esta acción, el estudiante JOEL digita en la entrada de comandos la sentencia g' obteniendo así la derivada de la representación gráfica de la función volumen, presentada en el archivo, en el registro gráfico CAS. En la Figura 94 se presentan estos procedimientos.

Figura 94
Representación gráfica de la derivada de la función que modela el volumen acumulado según el departamento de producción



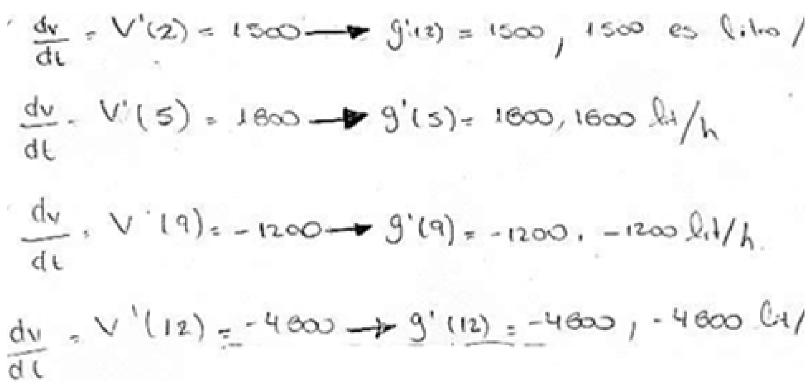
Con la representación obtenida, los estudiantes realizaron algunas modificaciones ópticas en el registro grafico CAS, las cuales consistieron en realizar acercamientos (zoom) que se llevaron a cabo con el uso de la herramienta aproximar[112] del GeoGebra. Estas acciones corresponden a tratamientos realizados en el registro gráfico tal como lo señala VIGO INGAR[113]; y la finalidad de estos acercamientos fue obtener algu-

112 

113 VIGO INGAR. “A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais”, cit.

nos valores de la función que modela la razón de cambio debido a que estos no eran visibles y con ello poder compararlos con la representación gráfica presente en el enunciado de la actividad. De esta manera, con la intención de justificar sus respuestas, los estudiantes señalaron el valor de la función derivada en las horas $t = 2, 5, 9$ y 12, tal como se puede observar en la Figura 95.

Figura 95
Valores de la razón de cambio con la finalidad de justificar sus conjeturas



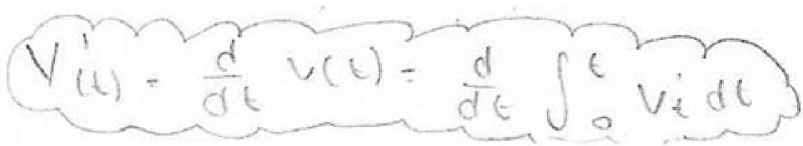
Estos valores se obtuvieron gracias a los tratamientos realizados en el registro gráfico CAS, además, estos valores son alcanzados por la representación gráfica mostrada en el enunciado justificando así que el modelo presentado por el departamento de producción, en el archivo *MODELO_APROXIMADO.ggb*, modela el comportamiento del volumen acumulado en el tanque de pasteurización a medida que transcurren las horas.

La pregunta 3 fue resuelta por esta pareja pues lograron obtener la derivada de la representación del volumen acumulado presentada en el archivo, la cual fue comparada con la representación mostrada en el enunciado de la actividad llegando así a la solución de la esta pregunta. Esta manera de solución corresponde al segundo criterio que se había supuesto en el análisis *a priori*.

Sin embargo, el procedimiento seguido por los estudiantes para justificar no fue el esperado debido a que se había considerado que la pareja al no poder identificar el tipo de funciones que se presentaban en el archivo *MODELO_APROXIMADO.ggb*, optasen por obtener la razón de cambio de la función de manera gráfica, esto es, utilizando la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función presentada. De esta manera, los estudiantes hubiesen seguido el procedimiento supuesto si se ocultaba la etiqueta de la función volumen, lo cual les hubiese imposibilitado realizar la sentencia g'.

Por consiguiente, la pareja logró establecer una conclusión importante, la cual se muestra en la Figura 96, a partir de los procedimientos realizados. Esto muestra que los estudiantes con la información brindada en la situación problema resolvieron las cuestiones presentes en él usando sus conocimientos previos, además, la situación diseñada logró poner en juego el objeto matemático de estudio, en este caso la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo, que fue lo que se deseaba explorar, siendo esto último, según Almoloud[114] el objetivo de diseñar una situación problema.

Figura 96
Conclusión obtenida por la pareja 2 al desarrollar la tercera pregunta



Esta conclusión muestra la esencia de la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo, si bien esta no fue solicitada de manera explícita por la pregunta, fue muy importante que los estudiantes la hayan hecho explícita. La acción mencionada, es consecuencia de la sugerencia que realizó el profesor-investigador antes de iniciar el desarrollo de la actividad la cual consistió en registrar en la ficha cualquier resultado que crean importante.

– *Pregunta 4*

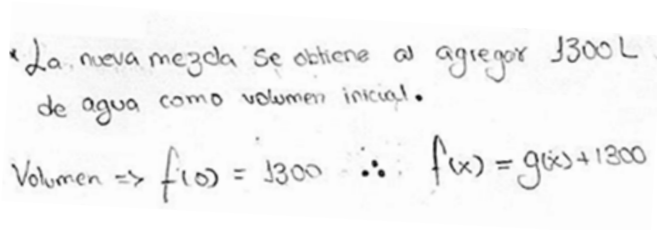
Luego de leer con detenimiento la pregunta, los estudiantes establecieron que: "para hallar el volumen total de la mezcla hay que sumarle los 1.300 litros de agua", lo cual muestra que para obtener el volumen acu-

114 Almouloud. "Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos", cit.

mulado total, ya disuelto de la mezcla, se deben considerar los 1.300 litros de agua que había inicialmente.

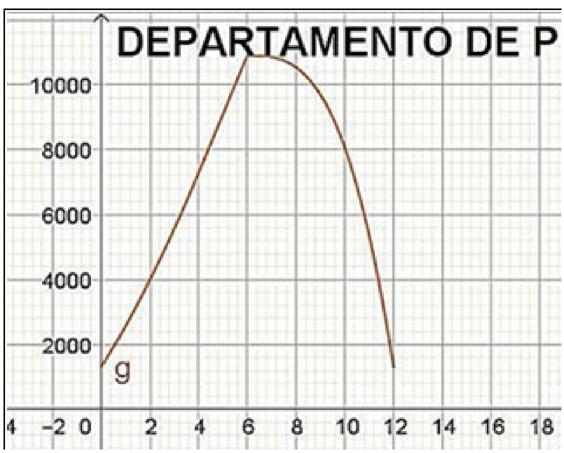
Con la representación realizada del volumen acumulado en el registro de lengua natural, los estudiantes realizaron la conversión de esta representación a la siguiente representación en el registro algebraico: $f(x) = (x) + 1.300$, donde $f(x)$ representa el volumen disuelto, $f(0) = 1.300$ la condición inicial y $g(x)$ representa el volumen sin disolver. Las representaciones realizadas por la pareja se observan en la Figura 97.

Figura 97
Representaciones del volumen total, ya disuelto, en los registros lengua natural y algebraico



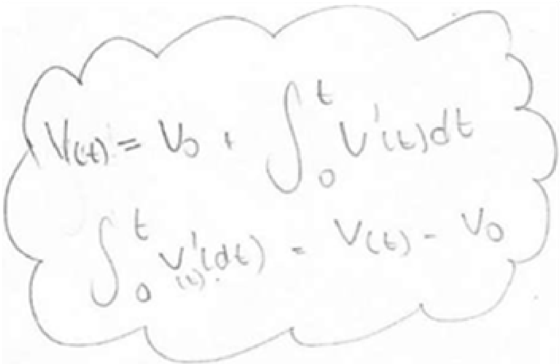
Posterior a esto, la representación algebraica es transformada a una representación en el registro gráfico CAS mediante una conversión, mostrada en la Figura 98.

Figura 98
Representación en el registro gráfico CAS del volumen total disuelto



Para realizar esta representación, los estudiantes efectuaron un tratamiento en el registro gráfico CAS a la representación gráfica presentada en el archivo *MODELO_APROXIMADO.ggb*, esta transformación consiste en realizar una traslación vertical de 1.300 litros a la representación inicial. Con respecto a las acciones realizadas por los estudiantes en esta pregunta, efectuaron los procedimientos que se habían supuesto en el análisis *a priori*. Además, establecieron la conjetura que se observa en la Figura 99.

Figura 99
Conjetura formulada por la segunda pareja al resolver la cuarta pregunta



La conjetura mostrada en la figura 99 corresponde a la segunda parte del TFC, la cual permite calcular integrales definidas de una función a partir de evaluar una primitiva de esta en los límites de integración superior e inferior.

4) Socialización de la actividad

Al terminar la segunda actividad, se generalizan los resultados obtenidos por las parejas y el profesor investigador socializa el significado del proceso realizado en la tercera pregunta según el contexto planteado en la actividad. La acción realizada por el profesor se puede observar cuando formula el Teorema Fundamental del Cálculo - parte 1 planteando la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{t} V'(x)dx = V'(t)$$

Luego, el profesor plantea que dicha igualdad es válida en puntos donde la función razón de cambio $V'\ (t)$ es continua. De manera similar, el profesor-investigador socializa el significado del proceso realizado en la cuarta pregunta según el contexto planteado en la actividad. La acción realizada por el profesor se puede observar cuando formula el Teorema Fundamental del Cálculo - parte 2, planteando la siguiente expresión:

$$V_{disuelto}(t) = V\ (0) + \int_0^t V'\ (T)\ dT$$

Así mismo, con el siguiente tratamiento obtiene la parte 2 del Teorema Fundamental del Cálculo.

$$\int_o^t V'\ (T)dT = \ V_{disuelto}\ (t) - V\ (0)$$

Por último, muestra el teorema ya terminado como lo presenta STEWART[115].

115 STEWART, JAMES. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

Capítulo quinto
Disposiciones finales sobre la aplicación de la semiótica en el teorema fundamental del cálculo

El manejo y tratamiento del Teorema Fundamental del Cálculo dentro de los cursos de matemáticas de las universidades, es un método efectivo y eficaz para que los estudiantes puedan reconocer y desarrollar nuevos conocimientos referentes a las materias de cálculos, a las funciones y a las derivadas. Esto forma parte de un nuevo paradigma científico moderno, en aras de que la educación pueda crecer y desarrollarse de forma amplia, en este caso la educación peruana. Sin embargo, existen deficiencias en el diseño y elaboración del Teorema Fundamental del Cálculo, generando que este estudio proponga que los sistemas educativos sean revisados y actualizados para responder a las exigencias actuales, de acuerdo a las corrientes disciplinarias y al nivel educativo en que se presente, de manera que este teorema sea bien implementado por los estudiantes, a los fines de lograr tener un satisfactorio desarrollo matemático. Bajo esta perspectiva, se requiere una mejora en el rendimiento académico, mediante la permanente ayuda de las autoridades educativas y de los profesores de las instituciones académicas, a través de una variedad de técnicas adecuadas que permitan la elaboración de soluciones de aprendizaje integral.

Así mismo, también se hace constar que el uso de la tecnología supone una fusión de la inteligencia del individuo con una herramienta ajena y externa, sin la cual la mente no funcionaría igual debido a que las computadoras y sus derivados permiten un aprendizaje interactivo y dinámico que solventa y visualiza las soluciones a problemas, así como conceptos teóricos, favoreciendo, de esta manera, el aprendizaje de los estudiantes de manera sistemática y estructural.

Por otro lado, se evidencia que el desarrollo de este teorema no depende solamente de algún software educativo, sino de su adecuada implementación y manejo por parte del profesor y de los estudiantes, estableciendo así una interacción dinámica con el objetivo de superar aquellas barreras y obstáculos que se presentan en cualquier función y derivadas; suponiendo un cambio en el conocimiento de la sociedad y en las habilidades científicas y tecnológicas.

I. Consideraciones finales

La enseñanza y/o aprendizaje de cálculo a nivel universitario, en particular del tema Teorema Fundamental del Cálculo, posee pocas investigaciones referidas a dicho objeto matemático, las dificultades que presentan los estudiantes en este tema, la existencia de herramientas tecnológicas como el GeoGebra, motivaron la realización de este estudio.

Se comenzó este trabajo realizando un estudio de las investigaciones que tenían como objeto de estudio el Teorema Fundamental del Cálculo –tfc–, además, investigaciones relacionadas a la problemática que hay en la enseñanza del tfc, encontrando antecedentes como los de Grande[116], Robles *et al.*[117], Campos[118], Picone[119], Anacleto[120] y Scucuglia[121], en donde se determinaron conceptos como: la idea de acumulación, una noción importante para contextualizar situaciones relacionadas a la integral, la razón de cambio de esa acumulación que es relacionada a la derivada, la función, el dominio, la continuidad; que permiten una interpretación gráfica del tfc.

116 Grande. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", cit.

117 Robles ARREDONDO, TELLECHEA Armenta y Font Moll. "Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo", cit.

118 Campos. "A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica", cit.

119 Picone. "Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo", cit.

120 Anacleto. "Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo", cit.

121 Scucuglia. "A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas", cit.

El marco teórico estuvo basado en la teoría de registros de representación semiótica fundamentada de Duval[122], permitiendo analizar la coordinación de las representaciones en los registros de representación semiótica: gráfico - algebraico - lengua natural, que los estudiantes de la carrera Ingeniería de Alimentos realizan cuando desarrollan una situación problema relacionada al TFC. Según los resultados obtenidos, a partir de la experimentación de la situación problema, en este sentido, se pudo verificar el logro de los objetivos planteados, lo cual permitió responder a la pregunta de investigación: ¿los estudiantes de Ingeniería de Alimentos coordinan los registros de representación semiótica cuando desarrollan una situación problema relacionada al TFC?

Al respecto se puede determinar que los estudiantes sí realizaron la coordinación en los registros mencionados. Por ejemplo, en la primera actividad lograron coordinar la representación del área bajo la sombreada en los registros gráficos y lengua natural; también en esta actividad la primera pareja logró coordinar la representación de la medida del área de la región sombreada en los registros gráfico, lengua natural a diferencia de la segunda pareja que logró coordinar la misma representación en los registros gráficos, de lengua natural y algebraico. En la segunda actividad, ambas parejas lograron coordinar la representación de la función *razón de cambio* en los registros gráfico, lengua natural, algebraico y gráfico CAS.

La situación problema diseñada logró poner en juego los objetos matemáticos involucrados en el TFC, las derivadas e integrales definidas, formulando conjeturas relacionadas a la tesis del TFC. Estas conjeturas fueron obtenidas por la segunda pareja al desarrollar las preguntas 3 y 4 de la segunda actividad. Con esto, la situación problema planteada logró poner en juego las tesis del TFC, cumpliéndose así la finalidad que tiene la situación problema señalada por Almoloud[123].

La noción de acumulación fue un elemento clave para la comprensión de la función representada por $F(x) = ʃ\_0^(x) f(t)dt$, pues los estudiantes lograron realizar operaciones con ella. Además, esta noción permitió darle un significado a la integral definida, lo cual fue funda-

122 Duval. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, cit.

123 Almouloud. "Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos", cit.

mental para diseñar la situación problema. Esta noción está basada en la idea de acumular cantidades, la cual fue observada cuando se realizó el análisis epistemológico del objeto de estudio, por ejemplo, en los trabajos de cálculos de cuadraturas de ARQUÍMEDES y de métodos de los indivisibles de CAVALIERI.

Con respecto al análisis preliminar de este estudio, según la ingeniería didáctica de ARTIGUE *et al*.[124], se tenía la certeza de que emplear recursos tecnológicos, en este caso el GeoGebra, permite a los estudiantes realizar transformaciones en las representaciones de diversos objetos matemáticos, en particular las funciones y la integral definida, ya que según DUVAL los objetos matemáticos no son accesibles ni manipulables por nuestros sentidos. Por ello, la elección del GeoGebra trajo como consecuencia que se generen un conjunto de situaciones y decisiones, con el propósito de alcanzar los objetivos específicos de la investigación, y con ellos lograr así el objetivo general de la misma.

Por último, con respecto a los aspectos didácticos del Teorema Fundamental del Cálculo, se llevó a cabo mediante la revisión de dos textos de consulta del curso Matemáticas II, y se pudo comprobar que la metodología empleada para la enseñanza de dicho tema se ejecutó mediante la conversión en un solo sentido del registro algebraico al registro gráfico, y no en el sentido inverso, ya que según la Teoría de Registros de Representación Semiótica de DUVAL[125], no se indica que la conversión entre dichos registros debe ser realizado en ambos sentidos; siendo el libro de STEWART[126] el que emplea mayor cantidad de conversiones, mientras que el libro de LIMA[127], sólo emplea discursos matemáticos, algo característico en los libros de matemática pura.

124 ARTIGUE, MORENO FERNÁNDEZ y DOUADY. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, cit.

125 DUVAL. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, cit.

126 STEWART. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, cit.

127 LIMA. *Análisis Real. Volumen 1*, cit.

Bibliografía

Almouloud, Saddo Ag. *Fundamentos da educação matemática*, Panamá, Universidad Federal de Panamá, 2007.

Almouloud, Saddo Ag. “Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos”, en *revemat*, vol. 11, n.° 2, 2016, pp. 109 a 141, disponible en [https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p109].

Anacleto, Grácia Maria Catelli. “Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo” (tesisde maestría), São Paulo, Brasil, Pontificia Universidad Católica de São Paulo, 2007.

Artigue, Michèle. “Ingenierie didactique”, en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, n.° 3, 1989, pp. 281 a 308, disponible en [https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/].

Artigue, Michèle; Luis Moreno Fernández y Régine Douady. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, disponible en [http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf].

Bogdan, Robert y Sari Knopp Biklen. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*, Portugal, Porto Editora, 1994.

Borba, Marcelo C. y Mónica E. Villarreal. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization, and experimentation*, Nueva York, Springer, 2005.

Boyer, Carl B. *Historia de la matemática*, España, Alianza Editorial, 1987.

Brousseau, Guy. *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*, Buenos Aires, Argentina, Libros de Zorzal, 2007.

Brousseau, Guy. *Introduction à l'Ingénierie Didactique*, 2016, disponible en [http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-ling%C3%A9nierie-didactique3.pdf].

Camarena Gallardo, Patricia. "Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en ingeniería" (tesis doctoral), México, Academia de Ingeniería, 2010, disponible en [http://www.ai.org.mx/ai/archivos/ingresos/camarenagallardo/dra._patricia_camarena_gallardo.pdf].

Campos, Ronaldo Pereira. "A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica" (tesis de maestría), São Paulo, Brasil, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007, disponible en [https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11269].

Creswell, John W. "Mapping the developing landscape of mixed methods research", en Abbas Tashakkori y Charles Teddlie (eds.). *Sage handbook of mixed methods in social & behavioral research*, Los Angeles, California, sage Publicaciones 2010.

Douady, Régine. "Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane", en *Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, fascicule 5 " Didactique des mathématiques", 1987, pp. 1 a 50, disponible en [http://www.numdam.org/article/PSMIR_1987-1988___5_A3_0.pdf].

Duval, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, Cali, Colombia, Universidad del Valle, 1999.

Duval, Raymond. *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo: Curso del Doctorado en Educación con énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle, 1999*, Cali, Colombia, Universidad del Valle, 2004.

Duval, Raymond. "Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática", en Silvia Dias Alcântara Machado (org). *Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica*, Campinas, Editora Papiros, 2013.

Fischbein, Efraim. "Intuitions and schemata in mathematical reasoning", en *Educational Studies in Mathematics*, vol. 38, 1999, pp. 11 a 50, disponible en [https://link.springer.com/article/10.1023/A:1003488222875].

Gordillo, Wilson y Luis R. Pino-Fan. "Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada", en *Boletim de Educação Matemática*, vol. 30, n.° 55, 2016, pp. 535 a 558, disponible en [https://www.scielo.br/pdf/bolema/v30n55/1980-4415-bolema-30-55-0535.pdf].

GRANDE, ANDRÉ LÚCIO. "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino" (tesis doctoral), São Paulo, Brasil, Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2013, disponible en [https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/10979].

HIBBELER, RUSSELL C. *Ingeniería mecánica - Estática*, 12.ª ed., México, Pearson Educación, 2010.

LIMA, ELON LAGES. *Análisis Real. Volumen 1*, Santiago de Chile, Instituto de Matemática y Ciencias Afines, 1997, disponible en [https://www.u-cursos.cl/usuario/04ca1aaa5a84ce549ea753721d6895f0/mi_blog/r/An_lisis_Real._Lima.pdf].

PICONE, DESIREE FRASSON BALIELO. "Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo" (tesis de maestría), São Paulo, Brasil, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007, disponible en [https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11275].

POINCARÉ, HENRI. "El valor de la ciência", España, KRK Ediciones, 2008.

ROBLES ARREDONDO, MARTHA GABRIELA; EDUARDO TELLECHEA ARMENTA y VICENÇ FONT MOLL. "Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo", en *Educación Matemática*, vol. 26, n.° 2, 2014, pp. 69 a 109, disponible en [https://www.redalyc.org/pdf/405/40532665004.pdf].

SCUCUGLIA, RICARDO. "A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas" (tesis de maestría), Río Claro, Brasil, Universidade Estadual Paulista, 2006, disponible en [http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissertacoes/scucuglia_r_me_rcla.pdf].

STEWART, JAMES. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, 7.ª ed., México, Cengage Learning, 2012, disponible en [https://intranetua.uantof.cl/estudiomat/calculo3/stewart.pdf].

TALL, DAVID. "The psychology of advanced mathematical thinking", en *Advanced Mathematical Thinking*, Boston, Kluwer Academic Publishers, 2002, disponible en [https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F0-306-47203-1_1].

TAYLOR, S. J. y R. BOGDAN. *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*, Barcelona, España, Paidós, 1987.

VIGO INGAR, KATIA. "A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais" (tesis doctoral), São Paulo, Brasil, Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2014, disponible en [https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11013].

La autora

Katia Vigo Ingar
vigokatia1@gmail.com

Doctora en Educación Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil; Magíster en Matemática por la Pontificia Universidad Católica del Perú; Maestra en Investigación y Docencia Universitaria por la Universidad Nacional del Callao; Licenciada en Matemática por la Universidad Nacional de Trujillo. Es docente a tiempo completo en la categoría de asociada de la Facultad de Ingeniería Pesquera y de Alimentos de la Universidad Nacional del Callao y docente en la Pontificia Universidad Católica del Perú en la Maestría en Enseñanza de la Matemática.

Editado por el Instituto Latinoamericano de Altos Estudios –ILAE–,
en abril de 2021

Se compuso en caracteres Cambria de 12 y 9 ptos.

Bogotá, Colombia